

Le lemme fondamental pondéré I

Constructions géométriques

Pierre-Henri Chaudouard et Gérard Laumon

Résumé

Ce travail est la partie géométrique de notre démonstration du lemme fondamental pondéré qui prolonge celle du lemme fondamental de Langlands-Shelstad due à Ngô Bao Châu.

L'approche de Ngô repose sur l'étude de partie elliptique de la fibration de Hitchin. Cette fibration a pour espace total le champ des fibrés de Hitchin et pour base l'espace affine des "polynômes caractéristiques". Au-dessus de l'ouvert elliptique, elle est propre et le nombre de points de ses fibres sur un corps fini s'exprime en termes d'intégrales orbitales.

Dans cet article, on étudie la fibration de Hitchin au-dessus d'un ouvert plus gros que l'ouvert elliptique, le lieu "génériquement semi-simple régulier". Les fibres ne sont en général ni de type fini ni même séparées. Par analogie avec les troncatures d'Arthur, nous introduisons le champ des fibrés de Hitchin ξ -stables. Nous montrons que celui-ci est un champ de Deligne-Mumford, lisse sur le corps de base et propre au-dessus de la base des polynômes caractéristiques. Nous exprimons le nombre de points d'une fibre ξ -stable sur un corps fini en termes d'intégrales orbitales pondérées d'Arthur qui apparaissent dans la formule des traces d'Arthur-Selberg.

Abstract

This work is the geometric part of our proof of the weighted fundamental lemma, which is an extension of Ngô Bao Châu's proof of the Langlands-Shelstad fundamental lemma.

Ngô's approach is based on a study of the elliptic part of the Hitchin fibration. The total space of this fibration is the algebraic stack of Hitchin bundles and its base space is the affine space of "characteristic polynomials". Over the elliptic set, the Hitchin fibration is proper and the number of points of its fibers over a finite field can be expressed in terms of orbital integrals.

In this paper, we study the Hitchin fibration over an open set bigger than the elliptic set, namely the "generically regular semi-simple set". The fibers are in general neither of finite type nor separated. By analogy with Arthur's truncation, we introduce the substack of ξ -stable Hitchin bundles. We show that it is a Deligne-Mumford stack, smooth over the base field and proper over the base space of "characteristic polynomials". Moreover, the number of points of the ξ -stable fibers over a finite field can be expressed as a sum of weighted orbital integrals, which appear in the Arthur-Selberg trace formula.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Morphisme caractéristique	5
3	Schémas caractéristiques	7
4	La fibration de Hitchin	14
5	Convexe associé à un triplet de Hitchin.	18
6	La ξ-stabilité	26

7	Description adélique des fibres de Hitchin	31
8	Critère valuatif : existence	35
9	Séparation du morphisme f^ξ	51
10	\mathcal{M}^ξ est un champ de Deligne-Mumford	55
11	Comptage des points rationnels dans une fibre	57

1 Introduction

1.1. Ce travail est la partie géométrique de notre démonstration du lemme fondamental pondéré dont la stratégie suit celle élaborée par Ngô Bao Châu dans sa démonstration du le lemme fondamental de Langlands-Shelstad.

Cette partie géométrique poursuit deux objectifs. D'une part, on tronque la fibration de Hitchin de sorte que les fibres de Hitchin tronquées soient propres. D'autre part, on exprime le nombre de points sur un corps fini d'une telle fibre en termes d'intégrales orbitales pondérées globales d'Arthur qui interviennent dans la formule des traces d'Arthur-Selberg ; plus exactement, il s'agit de variantes de ces intégrales pour les algèbres de Lie.

Nos constructions s'appliquent à tout groupe algébrique semi-simple et nos résultats valent dans cette généralité. Cependant, pour les besoins de cette introduction, nous allons nous limiter au cas du groupe $\mathrm{SL}(n)$.

1.2. Soit C une courbe projective, lisse, connexe, de genre g sur un corps algébriquement clos k , n un entier > 0 et D un diviseur effectif sur C de degré $d > 2g$. On suppose que la caractéristique de k est soit nulle soit $> n$.

Un fibré de Hitchin pour le groupe $\mathrm{SL}(n)$ est un couple (\mathcal{E}, θ) où \mathcal{E} est fibré vectoriel de rang n sur C muni d'une trivialisation de son déterminant et $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(D)$ est un endomorphisme tordu de \mathcal{E} de trace nulle.

Soit \mathbb{M} le champ algébrique sur k des fibrés de Hitchin. La fibration de Hitchin est le morphisme

$$f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{A}$$

de base l'espace affine

$$\mathbb{A} = \bigoplus_{i=2}^n H^0(C, \mathcal{O}_C(iD)).$$

qui envoie (\mathcal{E}, θ) sur le polynôme caractéristique de θ noté

$$P_a(u) := u^n + a_2 u^{n-2} + \cdots + a_n,$$

avec $a_i \in H^0(C, \mathcal{O}_C(iD))$ pour $2 \leq i \leq n$.

Pour tout $a = (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{A}$, on dispose de la courbe spectrale Y_a d'équation

$$P_a(u) = 0$$

tracée sur la surface réglée $\Sigma_D = \mathbb{V}(\mathcal{O}_C(-D))$. C'est une courbe projective qui n'est en générale ni lisse ni irréductible, ni même réduite. La projection canonique $\pi_a : Y_a \rightarrow C$ est un revêtement fini de degré n .

Soit $\mathbb{A}^{\mathrm{reg}}$ l'ouvert où Y_a est réduite, c'est-à-dire où l'équation $P_a(u) = 0$ n'a que des racines simples au point générique de C . La fibre en $a \in \mathbb{A}^{\mathrm{reg}}$ de la fibration de Hitchin peut s'interpréter comme le champ des \mathcal{O}_{Y_a} -modules sans torsion \mathcal{F} qui sont de rang 1 en tout point générique de Y_a et qui sont munis d'une trivialisation du déterminant de $\pi_{a,*} \mathcal{F}$ (cf. [6]). L'ouvert $\mathbb{A}^{\mathrm{reg}}$ contient l'ouvert elliptique $\mathbb{A}^{\mathrm{ell}}$ des a tels que Y_a est irréductible et donc intègre. La fibre de Hitchin en tout point de l'ouvert elliptique est un champ de Deligne-Mumford propre. Par contre, la fibre de

Hitchin en un point a non elliptique de \mathbb{A}^{reg} est un champ d'Artin qui n'est ni séparé ni de type fini.

1.3. Dans ce travail nous tronquons les fibres de Hitchin non elliptiques par une notion convenable de stabilité. Notre construction dépend de données auxiliaires que nous allons maintenant introduire.

Soit ∞ un point fermé de C qui n'est pas dans le support de D . On se restreint à l'ouvert $\mathbb{A}^{\infty\text{-reg}}$ de \mathbb{A}^{reg} où $P_a(u)$ n'a que des racines simples au point ∞ . Cela n'est pas très restrictif puisque les ouverts $\mathbb{A}^{\infty\text{-reg}}$ recouvrent \mathbb{A}^{reg} quand le point ∞ varie. Soit

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{reg}}$$

le revêtement fini étale galoisien de groupe de Galois le groupe symétrique \mathfrak{S}_n qui consiste, pour chaque point a de \mathbb{A}^{reg} , à se donner un ordre total sur les racines de $P_a(u)$ au point ∞ . Soit

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$$

la fibration déduite de la fibration de Hitchin par le changement de base $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{A}$. Un point de \mathcal{M} est donc un triplet (\mathcal{E}, θ, t) formé

- d'un fibré de Hitchin (\mathcal{E}, θ) ;
- d'un point $t = (t_1, \dots, t_n)$ de k^n dont les coordonnées sont deux à deux distinctes et pour lequel la somme $t_1 + \dots + t_n$ est nulle ;

qui vérifient la condition suivante : le n -uplet (t_1, \dots, t_n) est la collection ordonnée des valeurs propres de $\theta_\infty \in \text{End}(\mathcal{E}_\infty)$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi_1 + \dots + \xi_n = 0$. La fibre en ∞ d'un sous-fibré vectoriel \mathcal{F} de \mathcal{E} qui est stable par θ , est une somme d'espaces propres pour θ_∞ c'est-à-dire on a

$$\mathcal{F}_\infty = \bigoplus_{i \in I} \text{Ker}(\theta_\infty - t_i)$$

pour un certain ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$. On pose alors

$$\deg_\xi(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) + \sum_{i \in I} \xi_i.$$

Définition 1.1. — On dit que $(\mathcal{E}, \theta, t_\infty) \in \mathcal{M}$ est ξ -stable si pour tout sous-fibré vectoriel non nul $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ stable par θ on a

$$\frac{\deg_\xi(\mathcal{F})}{\text{rang}(\mathcal{F})} < 0$$

Pour $\xi = 0$, on retrouve la notion usuelle de stabilité. Nous démontrons que la condition de ξ -stabilité est ouverte et définit donc un sous-champ ouvert \mathcal{M}^ξ de \mathcal{M} .

Théorème 1.2. — *Supposons que $\sum_{i \in I} \xi_i \notin \mathbb{Z}$ pour tout $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ non vide. Alors le champ \mathcal{M}^ξ est un champ de Deligne-Mumford propre sur \mathcal{A} qui est lisse sur k .*

Notre définition de ξ -stabilité est réminiscente d'une définition de stabilité avec poids due à Esteves [15] dans le cadre des jacobiennes compactifiées. Pour un groupe réductif quelconque, notre définition s'inspire des troncatures d'Arthur mais aussi du travail de Behrend (cf. [7]) sur la stabilité et la réduction canonique des schémas en groupes. Notre définition de stabilité est proche de celle des fibrés ordinaires ou de Hitchin avec structure parabolique étudiée dans [22] et [9].

Le théorème ci-dessus se démontre à l'aide de la méthode de Langton [23], reprise par Nitsure [26] dans le cadre des fibrés de Hitchin. En caractéristique nulle et pour un groupe général, on peut utiliser la méthode de Faltings (cf. [16]). Notre approche est en fait une adaptation d'un argument de nature adélique dû à Heinloth (cf. [21]), qui a l'avantage de fonctionner encore en caractéristique non nulle.

1.4. Le corps de base k est désormais une clôture algébrique d'un corps fini \mathbb{F}_q . On suppose que toutes nos données sont définies sur \mathbb{F}_q . Soit F le corps de fonctions de C , \mathbb{A} son anneau des adèles et \mathcal{O} le sous-anneau compact maximal de \mathbb{A} . On a

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(iD)) = F \cap \varpi^{-iD} \mathcal{O}$$

où ϖ^D est l'adèle correspondant à D .

Soit (a, t) un point de \mathcal{A} rationnel sur \mathbb{F}_q . Soit P_1, \dots, P_s les facteurs irréductibles de $P_a(u)$ vu comme un élément de $F[u]$. Ces facteurs s'écrivent au point ∞

$$P_j(\infty)(u) = \prod_{i \in I_j} (u - t_i)$$

pour une unique partition $\{1, \dots, n\} = I_1 \amalg \dots \amalg I_s$. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de k^n et, pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, V_I le sous-espace de k^n engendré par e_i pour $i \in I$. Soit $M \subset \mathrm{SL}(n)$ le stabilisateur des sous-espaces V_{I_j} pour $1 \leq j \leq s$. C'est un sous-groupe de Levi. Soit \mathfrak{m} et $\mathfrak{sl}(n)$ les algèbres de Lie de M et $\mathrm{SL}(n)$. Soit $X \in \mathfrak{m}(F)$ un élément semi-simple. On suppose que X est régulier au sens où son centralisateur T_X dans $\mathrm{SL}(n)$ est un tore maximal. Notons qu'on a $T_X \subset M$. Soit φ une fonction localement constante à support compact sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{A})$.

L'intégrale orbitale pondérée $J_M(X, \varphi)$ est définie par la formule

$$J_M(X, \varphi) = \int_{T_X(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{A})} \varphi(g^{-1}Xg) v_M(g) \frac{dg}{dt}$$

où

- dg est la mesure de Haar sur $\mathrm{SL}(n, \mathbb{A})$ qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal $\mathrm{SL}(n, \mathcal{O})$;
- dt est une mesure de Haar sur le tore $T_X(\mathbb{A})$;
- $v_M(g)$ est la fonction poids d'Arthur définie en terme de volume qui est invariante à gauche par $M(\mathbb{A})$.

Le volume

$$\mathrm{vol}(T_X(F) \backslash T_X(\mathbb{A})^1, dt)$$

est fini, où $T_X(\mathbb{A})^1 \subset T_X(\mathbb{A})$ est l'intersection des noyaux de tous les homomorphismes $T_X(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui sont obtenus en composant un caractère F -rationnel $T_X \rightarrow \mathbb{G}_{m, F}$ avec l'application degré $\mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$.

Théorème 1.3. — *Supposons $\sum_{i \in I} \xi_i \notin \mathbb{Z}$ pour tout $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ non vide. Alors le nombre de points rationnels sur \mathbb{F}_q de la fibre en (a, t) de la fibration de Hitchin tronquée $\mathcal{M}^\xi \rightarrow \mathcal{A}$ ne dépend pas de ξ . À un coefficient près qui ne dépend que de la normalisation de la fonction poids d'Arthur, il est égal à la somme suivante d'intégrales orbitales pondérées d'Arthur*

$$\sum_X \mathrm{vol}(T_X(F) \backslash T_X(\mathbb{A})^1, dt) J_M(X, \mathbf{1}_D)$$

où $\mathbf{1}_D$ est la fonction caractéristique de $\varpi^{-D} \mathfrak{sl}(n, \mathcal{O})$ et où la somme est prise sur les classes de $M(F)$ -conjugaison des éléments $X \in \mathfrak{m}(F)$ tels que le polynôme caractéristique de la restriction de X à V_{I_j} est égal à P_j pour $1 \leq j \leq s$.

1.5. Décrivons rapidement l'organisation de cet article. Quelques rappels et notations sont donnés dans la section 2. La section 3 introduit la base \mathcal{A} de notre fibration de Hitchin et donne les propriétés essentielles. On définit dans la section 4 le champ algébrique \mathcal{M} des triplets de Hitchin et le morphisme de Hitchin $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$. On y explique également la notion de réduction à un sous-groupe parabolique d'un triplet de Hitchin et on en donne un critère d'existence et d'unicité. Dans la section 5, on associe à chaque triplet de Hitchin un convexe qui est construit à l'aide des degrés des réductions de ce triplet aux sous-groupes paraboliques semi-standard. À l'aide de ce convexe,

on définit dans la section 6 la ξ -stabilité d'un triplet de Hitchin. On y énonce également le théorème principal de cet article qui généralise le théorème 1.2 ci-dessus (cf. théorème 6.9). La section 7 fournit une description adélique des triplets de Hitchin. La section 8 est entièrement consacrée à la démonstration de la partie existence du critère valuatif de propreté pour le morphisme f restreint au champ des triplets de Hitchin ξ -semi-stables. À la section 9, on démontre que la restriction du morphisme f au champ des triplets de Hitchin ξ -stables est séparé. À la section 10, on prouve que le champ des triplets de Hitchin ξ -stables, pour des ξ en "position générale", est un champ de Deligne-Mumford. L'article s'achève à la section 11 par le comptage des fibres de Hitchin ξ -semi-stables en termes d'intégrales orbitales pondérées d'Arthur (cf. le théorème 11.1 qui généralise le théorème 1.3).

1.6. Remerciements. — Une partie de cet article a été écrit lors d'un séjour du premier auteur nommé à l'*Institute for Advanced Study* de Princeton à l'automne 2008. Il souhaite remercier cet institut pour son hospitalité ainsi que la *National Science Foundation* pour le soutien (agreement No. DMS-0635607) qui a rendu ce séjour possible.

2 Morphisme caractéristique

2.1. Soit k une clôture algébrique d'un corps fini \mathbb{F}_q . Soit G un groupe algébrique réductif et connexe sur k et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. De manière générale, si une lettre majuscule désigne un groupe, son algèbre de Lie est notée par la lettre gothique minuscule correspondante. Soit Int l'action de G sur lui-même par automorphisme intérieur et Ad la représentation adjointe. Soit T un sous-tore maximal de G et \mathfrak{t} son algèbre de Lie. Soit

$$W = W^G = W_T^G$$

le groupe de Weyl de T dans G et

$$\Phi = \Phi^G = \Phi_T^G$$

l'ensemble des racines de T dans G . On note $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini X . On suppose que l'ordre $|W|$ du groupe de Weyl est inversible dans k .

2.2. Morphisme caractéristique. Soit $k[\mathfrak{g}]$ la k -algèbre des fonctions régulières sur \mathfrak{g} . Le groupe G agit sur son algèbre de Lie par l'action adjointe et par dualité sur $k[\mathfrak{g}]$. Soit $k[\mathfrak{g}]^G$ la sous-algèbre des fonctions G -invariantes et \mathbf{car} le quotient catégorique de \mathfrak{g} par G

$$\mathbf{car} = \text{Spec}(k[\mathfrak{g}]^G).$$

On a donc un morphisme canonique G -invariant

$$(2.1) \quad \chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{car}$$

qu'on appelle morphisme caractéristique.

Soit $k[\mathfrak{t}]$ la k -algèbre des fonctions régulières sur \mathfrak{t} et $k[\mathfrak{t}]^W$ la sous-algèbre des fonctions invariantes sous le groupe de Weyl W . Le morphisme de restriction $k[\mathfrak{g}] \rightarrow k[\mathfrak{t}]$ induit un morphisme

$$k[\mathfrak{g}]^G \rightarrow k[\mathfrak{t}]^W$$

qui est en fait un isomorphisme d'après le théorème de Chevalley. Il s'ensuit que d'une part la restriction du morphisme χ à \mathfrak{t} , encore notée χ , induit un isomorphisme

$$\mathfrak{t}/W = \text{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W) \simeq \mathbf{car}$$

et d'autre part il existe n éléments de $k[\mathfrak{g}]^G$ (avec $n = \text{rang}(G)$), homogènes et algébriquement indépendants, qui engendrent la k -algèbre $k[\mathfrak{g}]^G$ ([10] §§5 et 6). Les degrés de ces éléments ne dépendent que du groupe G . En particulier, le schéma \mathbf{car} est isomorphe à l'espace affine standard de dimension $n = \text{rang}(G)$.

2.3. Discriminant. Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, soit $d\alpha \in k[t]$ sa dérivée. Le discriminant D^G défini par

$$D^G = \prod_{\alpha \in \Phi} d\alpha$$

appartient à $k[t]^W$. Soit $\mathbf{car}^{\text{reg}}$ l'ouvert régulier de \mathbf{car} c'est-à-dire l'ouvert où D^G ne s'annule pas.

2.4. Quelques propriétés du morphisme caractéristique. Par définition, un élément de \mathfrak{g} est *régulier* si son orbite sous G est de dimension maximale c'est-à-dire égale à la différence entre la dimension et le rang de G . Soit $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ l'ouvert de \mathfrak{g} formé des éléments réguliers et

$$\mathfrak{t}^{\text{reg}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}}.$$

Le morphisme

$$\chi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{car}$$

est un revêtement fini et galoisien de groupe W . Il induit sur les ouverts réguliers un revêtement étale $\mathfrak{t}^{\text{reg}} \rightarrow \mathbf{car}^{\text{reg}}$.

2.5. Section de Kostant. — Pour tout $\alpha \in \Phi$, le sous-espace radiciel

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T \text{ Ad}(t)X = \alpha(t)X\}$$

est de dimension 1 sur k .

Soit B un sous-groupe de Borel de G qui contient T et $\Delta \subset \Phi$ l'ensemble des racines simples de T dans B . Pour tout $\alpha \in \Delta$, soit X_α un élément non nul de \mathfrak{g}_α . Soit α^\vee la coracine de α . Soit $X_{-\alpha}$ l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[X_\alpha, X_{-\alpha}]$ est égale à la coracine α^\vee vue comme élément de \mathfrak{t} . Soit

$$X_- = \sum_{\alpha \in \Delta} X_{-\alpha}.$$

et

$$\mathfrak{g}_{X_+} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [Y, X_+] = 0\}.$$

D'après un théorème de Kostant, l'espace affine $X_- + \mathfrak{g}_{X_+}$ est inclus dans l'ouvert régulier $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ et le morphisme caractéristique $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{car}$ induit un isomorphisme

$$X_- + \mathfrak{g}_{X_+} \rightarrow \mathbf{car}.$$

Le morphisme inverse

$$\varepsilon : \mathbf{car} \rightarrow X_- + \mathfrak{g}_{X_+}$$

est noté simplement ε ou plus précisément $\varepsilon_{(B, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})}$ si l'on veut rappeler la dépendance en l'épinglage $(B, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})$.

2.6. Sous-groupes paraboliques et sous-groupes de Levi. — Pour tous sous-groupes M et Q de G , on note $\mathcal{F}^Q(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques P de G qui vérifient $M \subset P \subset Q$. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}^G(T)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques *semi-standard* de G (au sens où ils contiennent T).

On appelle *sous-groupe de Lévi* de G un facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique de G . Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}^G(T)$ l'ensemble des sous-groupes de Levi *semi-standard* de G (au sens où ils contiennent T).

Pour tout $P \in \mathcal{F}$, soit N_P le radical unipotent de P et $M_P \in \mathcal{L}$ l'unique sous-groupe de Levi de P qui contient T . Pour tout sous-groupe de Lévi $M \in \mathcal{L}$, soit $\mathcal{P}(M)$, resp. $\mathcal{L}(M)$ le sous-ensemble des $P \in \mathcal{F}$ tels que $M_P = M$, resp. des $L \in \mathcal{L}$ tels que $M \subset L$.

2.7. Soit $M \in \mathcal{L}$. Les notations des paragraphes précédents affublées d'un indice ou d'un exposant M valent pour le groupe réductif M . On prendra garde à ne pas confondre les ouverts $\mathbf{car}_M^{G\text{-reg}}$ et

$\text{car}_M^{M\text{-reg}}$ de car_M : le premier est le lieu où D^G ne s'annule pas alors que le second est défini par $D^M \neq 0$. Comme ce dernier ouvert n'intervient pas dans la suite, on pose

$$\text{car}_M^{\text{reg}} = \text{car}_M^{G\text{-reg}}.$$

De même, on distinguera les ouverts G -régulier $\mathfrak{m}^{G\text{-reg}}$ et M -régulier $\mathfrak{m}^{M\text{-reg}}$ de \mathfrak{m} . On ne s'intéressera qu'au premier. Aussi on pose

$$\mathfrak{m}^{\text{reg}} = \mathfrak{m}^{G\text{-reg}}.$$

Soit $P \in \mathcal{F}$ un sous-groupe parabolique semi-standard et $M = M_P$. Soit $k[\mathfrak{p}]$ l'algèbre des fonctions régulières sur \mathfrak{p} et $k[\mathfrak{p}]^P$ la sous-algèbre des fonctions P -invariantes. Soit le k -schéma affine $\text{car}_P = \text{Spec}(k[\mathfrak{p}]^P)$ et

$$(2.2) \quad \chi_P : \mathfrak{p} \rightarrow \text{car}_P$$

le morphisme P -invariant donné par l'inclusion $k[\mathfrak{p}]^P \subset k[\mathfrak{p}]$.

Lemme 2.1. — *Le morphisme de restriction $k[\mathfrak{p}] \rightarrow k[\mathfrak{m}]$ induit un isomorphisme d'algèbre $k[\mathfrak{p}]^P \simeq k[\mathfrak{m}]^M$ et un isomorphisme de schéma $\text{car}_P \simeq \text{car}_M$.*

Démonstration. — Soit $N = N_P$ et $\mathfrak{m}' \in \mathfrak{m}$ l'ouvert formé des éléments semi-simples G -réguliers. L'ouvert $\mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$ de \mathfrak{p} est la réunion des conjugués de \mathfrak{m}' sous N . Il s'ensuit que le morphisme $k[\mathfrak{p}]^P \rightarrow k[\mathfrak{m}]^M$ est injectif. Il possède une section donnée par $\phi \in k[\mathfrak{m}]^M \mapsto \phi \circ p \in k[\mathfrak{p}]^P$ où p est la projection $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{m}$. \square

3 Schémas caractéristiques

3.1. Conventions. — Soit S un k -schéma. Pour tout k -schéma U , soit

$$U_S = U \times_k S$$

le produit fibré de U et S au-dessus de k . Pour tous k -schémas U et V et tout k -morphisme $\phi : U \rightarrow V$, soit $\phi_S : U_S \rightarrow V_S$ le S -morphisme obtenu par changement de base. Lorsque $S = \text{Spec}(K)$ est le spectre d'un corps K extension de k , on note simplement U_K le K -schéma et ϕ_K le K -morphisme correspondant. Si $s \in S$, on note $k(s)$ le corps local en s et on pose $U_s = U_{k(s)}$ etc.

Soit S un k -schéma et H un schéma en groupes sur k . Pour tout H -torseur \mathcal{E} au-dessus de S et tout S -schéma U muni d'une action à gauche de H , le groupe H agit à droite sur le produit fibré $\mathcal{E} \times_S U$ par $(e, u).h = (eh, h^{-1}u)$ pour tous $h \in H$ et $(e, u) \in \mathcal{E} \times_S U$. Soit $\mathcal{E} \times_S^H U$ le produit contracté par H c'est-à-dire le quotient du produit $\mathcal{E} \times_S U$ par H . Lorsque $S = \text{Spec}(k)$, on omet l'indice S .

3.2. Soit C une courbe projective, lisse et connexe sur k de genre g . Soit D un diviseur effectif de degré $> 2g$ et ∞ un point de $C(k)$ qui ne rencontre pas le support de D . Soit \mathcal{L}_D "le" $\mathbb{G}_{m,k}$ -torseur sur C associé à D .

3.3. Les fibrés \mathfrak{t}_D et $\text{car}_{M,D}$. — Pour tout k -schéma V muni d'une action de $\mathbb{G}_{m,k}$, soit

$$V_D = \mathcal{L}_D \times_k^{\mathbb{G}_{m,k}} V$$

le produit contracté. Si V est un k -espace vectoriel et si l'action de $\mathbb{G}_{m,k}$ est linéaire, V_D est un fibré vectoriel sur C .

Soit $M \in \mathcal{L}$. L'action par homothétie du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}$ sur \mathfrak{t} induit une action de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur car_M pour laquelle le morphisme caractéristique χ_M est $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivariant. En outre, les

actions respectives de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur \mathfrak{t} et \mathbf{car}_M respectent les ouverts $\mathfrak{t}^{\text{reg}}$ et $\mathbf{car}_M^{\text{reg}}$. Par la construction précédente, on obtient un fibré vectoriel \mathfrak{t}_D et un fibré $\mathbf{car}_{M,D}$ ainsi que des ouverts

$$\mathfrak{t}_D^{\text{reg}} \subset \mathfrak{t}_D$$

et

$$\mathbf{car}_{M,D}^{\text{reg}} \subset \mathbf{car}_{M,D}.$$

On obtient également un morphisme, par abus encore noté χ_M ,

$$\chi_M : \mathfrak{t}_D \rightarrow \mathbf{car}_{M,D}$$

qui est un revêtement fini, galoisien de groupe W^M et étale au-dessus de l'ouvert $\mathbf{car}_D^{\text{reg}}$.

Lorsqu'on prend $M = G$, on omet l'indice M dans les notations.

3.4. Schéma caractéristique \mathcal{A}_M . — Soit $M \in \mathcal{L}$. Soit $\mathcal{A}_M^{G\text{-reg}}$ le k -schéma tel que pour tout k -schéma S , l'ensemble $\mathcal{A}_M^{G\text{-reg}}(S)$ des S -points est l'ensemble des couples

$$(a, t)$$

formés d'une section a du fibré $\mathbf{car}_{M,D,S}$ au-dessus de C_S et d'un point $t \in \mathfrak{t}_D^{G\text{-reg}}(S)$ qui vérifient

$$a(\infty_S) = \chi_M(t).$$

Dans la suite, on appelle $\mathcal{A}_M^{G\text{-reg}}$ le schéma caractéristique de M .

Remarque. — L'exposant $G\text{-reg}$ rappelle que le point $t \in \mathfrak{t}_D^{G\text{-reg}}(S)$ est G -régulier au sens où il appartient à $\mathfrak{g}^{\text{reg}}(S)$. Dans la suite, on omet cet exposant et on pose, abusivement,

$$\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_M^{G\text{-reg}}.$$

Lorsque $M = G$, on omet l'indice M et on pose

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$$

Proposition 3.1. — *Le schéma \mathcal{A}_M est lisse et irréductible de dimension*

$$\dim(\mathcal{A}_M) = \deg(D)(|\Phi^M|/2 + \text{rang}(M)) + \text{rang}(M)(1 - g).$$

Démonstration. — Le morphisme d'oubli de la donnée t fait de \mathcal{A}_M un revêtement fini, étale et galoisien de groupe de Galois W^M au-dessus du schéma des sections globales de $\mathbf{car}_{M,D}$ qui sont G -régulières au point ∞ . Mais ce dernier schéma est un ouvert du schéma des sections globales de $\mathbf{car}_{M,D}$, qui est non-canoniquement isomorphe à un espace vectoriel dont on voit qu'il est de la dimension annoncée par la formule de Riemann-Roch (dès que $\deg(D) > 2g - 2$, cf. [24] lemme 4.4.1).

Le morphisme d'oubli de la donnée a est un morphisme surjectif et ouvert de \mathcal{A}_M sur $\mathfrak{t}^{\text{reg}}$ dès que $\deg(D) > 2g - 1$ (cf. [24] preuve du lemme 5.5.2). Ses fibres sont isomorphes à des espaces affines. Il s'ensuit que \mathcal{A}_M est irréductible. \square

3.5. Morphismes entre schémas caractéristiques. — Soit $M \subset L$ deux sous-groupes de Levi semi-standard. Soit

$$\chi_L^M : \mathbf{car}_M \rightarrow \mathbf{car}_L$$

le morphisme défini par l'inclusion $k[\mathfrak{t}]^{W^L} \subset k[\mathfrak{t}]^{W^M}$. C'est un morphisme fini qui est étale au-dessus de $\mathbf{car}_L^{\text{reg}}$. Comme ce morphisme est $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivariant, il induit un morphisme fini, étale au-dessus de $\mathbf{car}_{L,D}^{\text{reg}}$

$$\chi_{L,D}^M : \mathbf{car}_{M,D} \rightarrow \mathbf{car}_{L,D}$$

Par abus de notations, on note encore χ_L^M le morphisme

$$\chi_L^M : \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_L$$

qui, pour tout k -schéma affine S , associe à $(a, t) \in \mathcal{A}_M(S)$ le couple $(\chi_{L,D}^M(a), t) \in \mathcal{A}_L$.

Proposition 3.2. — *Le morphisme*

$$\chi_L^M : \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_L$$

est une immersion fermée.

On reporte au §3.7 la preuve de cette proposition.

3.6. Caractéristiques elliptiques. — Soit $M \in \mathcal{L}(T)$. On pose

$$\mathcal{A}_{M,\text{ell}} = \mathcal{A}_M - \bigcup_{L \in \mathcal{L}, L \subsetneq M} \mathcal{A}_L.$$

On l'appelle le schéma caractéristique elliptique de M .

Proposition 3.3. — *Le schéma $\mathcal{A}_{M,\text{ell}}$ est un sous-schéma ouvert non vide de \mathcal{A}_M et un sous-schéma localement fermé de \mathcal{A} . Son adhérence dans \mathcal{A} est le sous-schéma fermé \mathcal{A}_M .*

Démonstration. — Tout d'abord, $\mathcal{A}_{M,\text{ell}}$ est non vide pour des raisons de dimension (cf. la formule de dimension de la proposition 3.1). Le reste de la première assertion résulte de la proposition 3.2. La seconde assertion résulte de l'irréductibilité de \mathcal{A}_M (cf. proposition 3.1). \square

Proposition 3.4. — *Le schéma \mathcal{A} est la réunion disjointe des sous-schémas localement fermés $\mathcal{A}_{M,\text{ell}}$ pour $M \in \mathcal{L}(T)$*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{M \in \mathcal{L}(T)} \mathcal{A}_{M,\text{ell}}.$$

La démonstration de cette proposition est reportée au §3.10.

3.7. Preuve de la proposition 3.2. — C'est une variante des preuves du lemme 7.3 de [25] et de la proposition 6.3.5 de [24]. Pour la commodité du lecteur, on rappelle ici les principaux arguments fondés en partie sur le lemme suivant (cf. lemme 7.3 de [25]).

Lemme 3.5. — *Soit S un k -schéma normal et intègre et $U \subset S$ un sous-schéma ouvert non vide. Soit V' et V deux S -schémas. Pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h'} & V' \\ i \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{h} & V \end{array}$$

où i est l'inclusion canonique, h' et h sont des sections et π est un S -morphisme fini, la section h' se prolonge d'une manière unique en une section $S \rightarrow V'$ qui relève h .

Montrons tout d'abord que le morphisme χ_L^M est radiciel. Il s'agit de voir que, pour tout corps K extension de k , le morphisme χ_L^M induit une injection sur les ensembles correspondants de K -points. Pour $i = 1, 2$ soit $(a_i, t_i) \in \mathcal{A}_M(K)$ deux éléments qui ont même image (a, t) dans \mathcal{A}_L . On a donc $t = t_1 = t_2$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_K & \xrightarrow[a_2]{a_1} & \text{car}_{M,D,K} \\ & \searrow a & \downarrow \chi_L^M \\ & & \text{car}_{L,D,K} \end{array}$$

Rappelons que le morphisme $\chi_{L,D}^M$ est fini. D'après le lemme 3.5 ci-dessus pour que $a_1 = a_2$ il suffit que a_1 et a_2 coïncident sur un ouvert de C_K . Or a_1 et a_2 prennent la même valeur au point ∞_K à savoir $\chi_M(t)$. Comme t est G -régulier et que le morphisme χ_L^M est étale au-dessus de $\mathbf{car}_{L,D,K}^{\text{reg}}$, les sections a_1 et a_2 coïncident sur le spectre du complété de l'anneau local de C_K au point ∞_K donc elles coïncident sur un ouvert de C_K .

Montrons ensuite que le morphisme $\chi_{L,D}^M$ est propre. Pour cela, on applique le critère valuatif de propreté. Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K . Soit $S = \text{Spec}(A)$. Soit $(a_M, t_M) \in \mathcal{A}_M(K)$ et $(a, t) \in \mathcal{A}_L(S)$ tel que $\chi_L^M((a_M, t_M)) = (a, t)$. On a donc $t_M = t$. D'après le lemme 3.5 ci-dessus, le morphisme a_1 se prolonge de manière unique en un morphisme de C_S dans $\mathbf{car}_{M,D}$ qui s'inscrit (en pointillés) dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_K & \xrightarrow{a_1} & \mathbf{car}_{M,D,S} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \chi_L^M \\ C_S & \xrightarrow{a} & \mathbf{car}_{L,D,S} \end{array}$$

Une fois le prolongement de a_1 acquis, il reste à vérifier que $a_1 \circ \infty_S = \chi_L^M(t)$. Cette égalité résulte de la propreté du morphisme χ_L^M puisque les deux sections $a_1 \circ \infty_S$ et $\chi_{L,D}^M(t)$ s'inscrivent (en pointillés) dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \xrightarrow{a_1 \circ \infty_K} & \mathbf{car}_{M,D,S} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \chi_L^M \\ S & \xrightarrow{a \circ \infty_S} & \mathbf{car}_{L,D,S} \end{array}$$

Montrons ensuite que le morphisme $\chi_{L,D}^M$ est non ramifié. Puisque \mathcal{A}_M et \mathcal{A}_L sont lisses, il revient au même de montrer que le morphisme tangent est injectif. Il s'agit donc de montrer que χ_L^M induit une application injective $\mathcal{A}_M(k[\varepsilon]) \rightarrow \mathcal{A}_L(k[\varepsilon])$ (où ε est une indéterminée de carré $\varepsilon^2 = 0$). Soit donc (a_1, t) et (a_2, t) deux éléments de $\mathcal{A}_M(k[\varepsilon])$ qui ont même image (a, t) dans $\mathcal{A}_L(k[\varepsilon])$. Dans la suite, on note par un indice ε le changement de base de k à $k[\varepsilon]$. Soit a_0 la section de $\mathbf{car}_{L,D}$ défini par restriction de a à C et $U \subset C$ l'ouvert défini comme l'image inverse par a_0 du lieu régulier $\mathbf{car}_{L,D}^{\text{reg}}$. Notons que $\infty \in U$. La section a induit alors un morphisme $U_\varepsilon \rightarrow \mathbf{car}_{L,D,\varepsilon}^{\text{reg}}$. Or le morphisme $\chi_{L,\varepsilon}^M$ est étale donc non ramifié au-dessus de $\mathbf{car}_{L,D,\varepsilon}^{\text{reg}}$. Il s'ensuit que les sections a_1 et a_2 coïncident sur U_ε donc sur C_ε par platitude de $k[\varepsilon]$ sur k .

En conclusion, le morphisme $\chi_{L,D}^M$ qui est radiciel, propre et non ramifié est une immersion fermée.

3.8. Dans ce paragraphe et le suivant, on rassemble quelques résultats utiles pour la suite et pour la preuve de la proposition 3.4.

Lemme 3.6. — Soit P un sous-groupe parabolique ou un sous-groupe de Levi de G . Soit F une extension de k et F_s une clôture séparable de F . Pour tous X et Y dans $\mathfrak{p}(F_s)$ et tout $a \in \mathbf{car}_P^{\text{reg}}(F_s)$ tels que

$$\chi_P(X) = \chi_P(Y) = a$$

il existe $p \in P(F_s)$ tel que $X = \text{Ad}(p)Y$.

Si, on suppose, de plus, que F est une extension de degré de transcendance 1 sur un corps algébriquement clos et que les éléments X et Y appartiennent à $\mathfrak{p}(F)$, alors on peut même prendre $p \in P(F)$.

Démonstration. — Le F_s -schéma défini par

$$\{p \in P \mid \text{Ad}(p)X = Y\}$$

n'est pas vide puisqu'il possède des points sur une clôture algébrique de F . C'est clairement un tore sous le centralisateur T_X de X dans $G \times_k F_s$. Or X est semi-simple et régulier donc ce

dernier est un tore sur F_s . On en déduit que le schéma ci-dessus est lisse sur F_s . Il possède donc des points dans F_s .

Supposons de plus que X et Y appartiennent à $\mathfrak{p}(F)$. Soit $p \in P(F)$ tel que $X = \text{Ad}(p)Y$. Alors pour tout $\tau \in \text{Gal}(F_s/F)$, l'élément $p\tau(p)^{-1}$ appartient à $T_X(F_s)$. On obtient ainsi un 1-cocycle de $\text{Gal}(F_s/F)$ dans T_X . Si le groupe de cohomologie $H^1(F_s/F, T_X)$ est trivial, on peut supposer qu'on a $p \in P(F)$, quitte à modifier p par un élément de $T_X(F_s)$. Comme T_X est connexe, dès que F est de dimension ≤ 1 , on sait que le groupe $H^1(F_s/F, T_X)$ est trivial (cf. [27] chap. III §2 théorème 1' et les remarques qui suivent). Cela permet de conclure puisqu'une extension de degré de transcendance 1 sur un corps algébriquement clos est de dimension ≤ 1 . \square

On utilisera la définition suivante d'un élément elliptique.

Définition 3.7. — Soit F une extension de k et $X \in \mathfrak{g}^{\text{reg}}(F)$ un élément G -régulier et semi-simple. Soit T_X son centralisateur dans G_F (c'est un sous- F -tore maximal de G_F) et $A_X \subset T_X$ le sous- F -tore déployé maximal de T_X . On dit que X est un élément *elliptique* de $\mathfrak{g}(F)$ si l'on a l'égalité

$$A_X = A_G$$

où A_G est la composante neutre du centre de G_F .

3.9. Soit K une extension de k . Soit F le corps des fonctions de la courbe C_K sur K . Soit \mathcal{O}_∞ le complété de l'anneau local de C_K en ∞_K et F_∞ le corps des fractions de \mathcal{O}_∞ . Avec ces notations, on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.8. — Pour tout $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$, soit $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}(\mathcal{O}_\infty)$ l'unique relèvement de t tel que la restriction de a à $\text{Spec}(\mathcal{O}_\infty)$ soit égale à $\chi(t_a)$. Soit $a_\eta \in \text{car}^{\text{reg}}(F)$ la restriction de a au point générique de C_K .

Pour tout $M \in \mathcal{L}(T)$ et $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_M(K))$;
2. il existe X un élément semi-simple G -régulier de $\mathfrak{m}(F)$ et $m \in M(F_\infty)$ tels que

- (a) $\chi_G(X) = a_\eta$;
- (b) $\text{Ad}(m)X = t_a$.

Démonstration. — Soit $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$. Un point t_a avec les propriétés ci-dessus existe et est unique puisque χ est étale au-dessus de car^{reg} .

Prouvons que la première assertion implique la seconde. On suppose donc qu'on a $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_M(K))$, c'est-à-dire qu'il existe $(a_M, t) \in \mathcal{A}_M(K)$ tel que

$$(3.1) \quad \chi_G^M(a_M) = a$$

et

$$(3.2) \quad a_M(\infty_K) = \chi_M(t).$$

Soit a_∞ et $a_{M,\infty}$ les restrictions de a et a_M à $\text{Spec}(\mathcal{O}_\infty)$. Les morphismes donnés par $a_{M,\infty}$ et $\chi_M(t_a)$ coïncident en fibre spéciale par (3.2) et s'inscrivent tous deux dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{O}_\infty) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\chi_M(t_a)} \\ \xrightarrow{a_{M,\infty}} \end{array} & \text{car}_M^{\text{reg}} \\ & \searrow a_\infty & \downarrow \chi_G^M \\ & & \text{car}^{\text{reg}} \end{array}$$

Comme χ_G^M est étale au-dessus de $\mathbf{car}^{\text{reg}}$, on a

$$a_{M,\infty} = \chi_M(t_a).$$

Soit $a_{M,\eta} \in \mathbf{car}_M^{\text{reg}}(F)$ la restriction de a_M au point générique. Il existe $X \in \mathfrak{m}(F)$ tel que

$$(3.3) \quad \chi_M(X) = a_{M,\eta}$$

(pour le voir, on peut utiliser une section de Kostant relative à M). Comme $a_{M,\eta}$ est G -régulier, X est nécessairement semi-simple et G -régulier. On a donc l'égalité suivante dans $\mathbf{car}_M^{\text{reg}}(F_\infty)$

$$\chi_M(t_a) = \chi_M(X).$$

D'après le lemme 3.6, il existe L une extension galoisienne finie de F_∞ et $m \in M(L)$ tel que

$$\text{Ad}(m)X = t_a.$$

On déduit de cette dernière égalité que pour tout $\sigma \in \text{Gal}(L/F_\infty)$, l'élément $m\sigma(m)^{-1}$ normalise t_a : il appartient donc à $T(L)$. On obtient ainsi une 1-cochaîne du groupe de Galois $\text{Gal}(L/F_\infty)$ à valeurs dans $T(L)$ qui est un cobord puisque, T étant un tore déployé, le groupe $H^1(L/F_\infty, T(L))$ est trivial. Il existe donc $x \in T(L)$ tel que $m\sigma(m)^{-1} = x\sigma(x)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(L/F_\infty)$. Quitte à remplacer m par $x^{-1}m$, on peut supposer que $m \in M(F_\infty)$. D'où la condition 2. (b). La condition 2.(a) résulte de (3.1) et (3.3).

Prouvons l'implication réciproque. On suppose donc qu'il existe $X \in \mathfrak{m}(F)$ semi-simple G -régulier et $m \in M(F_\infty)$ qui vérifient les assertions 2.(a) et 2.(b). Soit

$$(3.4) \quad a_{M,\eta} = \chi_M(X) \in \mathbf{c}_M^{\text{reg}}(F).$$

Ce F -point s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(F) & \xrightarrow{a_{M,\eta}} & \mathbf{car}_{M,D} \\ \downarrow & & \downarrow \chi_{G,D}^M \\ C_K & \xrightarrow{a} & \mathbf{car}_{G,D} \end{array}.$$

La propriété du morphisme χ_G^M implique que $a_{M,\eta}$ se prolonge en un morphisme

$$a_M : C_K \rightarrow \mathbf{car}_{M,D}$$

qui relève a . On a l'égalité suivante dans $\mathbf{c}_M^{\text{reg}}(K)$

$$(3.5) \quad \chi_M(t) = a_M(\infty_K)$$

En effet, vu (3.4), la restriction de a_M à $\text{Spec}(F_\infty)$ est égale à $\chi_M(X)$ donc égale à $\chi_M(t_a)$ par 2.(b). Il s'ensuit que la restriction de a_M à $\text{Spec}(\mathcal{O}_\infty)$ est aussi égale à $\chi_M(t_a)$. L'égalité (3.5) en résulte par évaluation au point ∞_K .

Le couple (a_M, t) définit donc un élément de $\mathcal{A}_M(K)$. Par construction de a_M , on a

$$\chi_G^M(a_M, t) = (a, t)$$

d'où l'assertion 1. □

Corollaire 3.9. — *Avec les notations de la proposition 3.8, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K))$;
2. il existe X un élément semi-simple, G -régulier et elliptique de $\mathfrak{m}(F)$ et $m \in M(F_\infty)$ tels que

- (a) $\chi_G(X) = a_\eta$;
- (b) $\text{Ad}(m)X = t_a$.

Démonstration. — Soit $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$.

Prouvons que la première assertion implique la seconde. On suppose donc $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(K))$. D'après la proposition 3.8, il existe X un élément semi-simple G -régulier de $\mathfrak{m}(F)$ et $m \in M(F_\infty)$ qui vérifient les assertions 2.(a) et 2.(b) de la proposition 3.8. On va montrer que X est nécessairement elliptique dans $\mathfrak{m}(F)$. Pour cela on raisonne par contradiction. Soit A_X le sous- F -tore déployé maximal de T_X le centralisateur de X dans G_F . Quitte à conjuguer X par un élément de $M(F)$ et translater m par ce même élément, on peut et on va supposer que A_X est inclus dans le tore “standard” T_F . Il existe alors $L \in \mathcal{L}^G(T)$ tel que le centralisateur de A_X dans G_F soit L_F . Notons qu'on a $L \subsetneq M$ et cette inclusion est stricte puisque X n'est pas elliptique dans M . Mais l'assertion 2.(b) de la proposition 3.8 implique

$$mT_{X, F_\infty}m^{-1} = T_{F_\infty}.$$

Or les tores T_{X, F_∞} et T_{F_∞} sont deux sous- F_∞ -tores maximaux et F_∞ -déployés de L_{F_∞} . Ils sont donc conjugués par un élément de $L(F_\infty)$. On a donc

$$m \in \text{Norm}_{M(F_\infty)}(T)L(F_\infty).$$

Comme T est un k -tore déployé, on a $\text{Norm}_{M(F_\infty)}(T) = \text{Norm}_{M(k)}(T)T(F_\infty)$. Il existe donc $w \in \text{Norm}_{M(k)}(T)$ et $l \in L(F_\infty)$ tels que

$$m = wl.$$

Soit $L_1 = wLw^{-1}$, $l_1 = wlw^{-1}$ et $X_1 = \text{Ad}(w)X$. Par construction, $L_1 \in \mathcal{L}(T)$ est un sous-groupe de Levi propre de M ; en outre, $l_1 \in L_1(F_\infty)$ et $X_1 \in \mathfrak{l}_1(F)$ vérifient les relations $\chi_G(X_1) = a_\eta$ et $\text{Ad}(l_1)X_1 = t_a$. Il résulte alors de la proposition 3.8 qu'on a $(a, t) \in \chi_G^{L_1}(\mathbb{A}_{L_1}(K))$. Cela contredit l'assertion 1 et montre que X est elliptique dans $\mathfrak{m}(F)$.

Montrons que l'assertion 2 implique la 1. Soit X un élément semi-simple, G -régulier et elliptique de $\mathfrak{m}(F)$ et $m \in M(F_\infty)$ qui satisfont 2.(a) et 2.(b). D'après la proposition 3.8, on a $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_M(K))$. Soit $L \in \mathcal{L}(T)$ un sous-groupe de Levi semi-standard inclus dans M tel que $(a, t) \in \chi_G^L(\mathcal{A}_{L, \text{ell}}(K))$. On vient de voir qu'il existe alors Y un élément semi-simple, G -régulier et elliptique de $\mathfrak{l}(F)$ et $l \in L(F_\infty)$ tels que $\chi_G(Y) = a_\eta$ et $\text{Ad}(l)Y = t_a$. D'après le lemme 3.6, il existe $g \in G(F_s)$ un point de G dans une clôture séparable F_s de F tel que $\text{Ad}(g)X = Y$. Le centralisateur de Y dans G_F est un sous- F -tore maximal. Pour tout $\sigma \in \text{Gal}(F_s/F)$, on a donc $\sigma(g)g^{-1} \in T_Y$ et l'automorphisme intérieur $\text{Int}(g)$ de G_{F_s} induit un F -isomorphisme de T_X sur T_Y et donc un F -isomorphisme entre les sous-tores F -déployés maximaux A_X et A_Y . Or ces derniers ne sont autres que les centres connexes $A_{M, F}$ et $A_{L, F}$ des sous-groupes de Levi M_F et L_F . On a donc $\dim(A_M) = \dim(A_L)$. Comme on a aussi $A_M \subset A_L$, il vient $A_M = A_L$ et $L = M$. Donc $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(K))$, ce qu'il fallait démontrer. \square

3.10. Preuve de la proposition 3.4. — Seul le fait que la réunion soit disjointe n'est pas évident. On reprend les notations du §3.9. Soit $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$ et M_1 et M_2 deux sous-groupes de Levi dans $\mathcal{L}(T)$ tels que a appartiennent à l'intersection des images de $\mathcal{A}_{M_1, \text{ell}}(K)$ et $\mathcal{A}_{M_2, \text{ell}}(K)$. D'après le corollaire 3.9, pour $i = 1, 2$, il existe $X_i \in \mathfrak{m}_i(F)$ un élément elliptique et G -régulier et $m_i \in M_i(F_\infty)$ tels que $\text{Ad}(m_i)X_i = t_a$ et $\chi_G(X_i) = a_\eta$. D'après le lemme 3.6, l'égalité $\chi_G(X_1) = \chi_G(X_2)$ entraîne l'existence d'un point $g \in G(F_s)$ à valeurs dans une clôture séparable F_s de F tel que $\text{Ad}(g)X_1 = X_2$. En raisonnant comme dans la preuve du corollaire 3.9, on voit qu'on a

$$gA_{M_1}g^{-1} = A_{M_2}.$$

Mais g conjugue X_1 et X_2 donc $m_2gm_1^{-1}$ centralise t_a qui est G -régulier. On a donc $m_2gm_1^{-1} \in T(F_s \otimes_F F_\infty)$ puis $A_{M_1} = A_{M_2}$ et $M_1 = M_2$ ce qu'il fallait voir.

4 La fibration de Hitchin

On poursuit avec les notations des sections précédentes.

4.1. Notations. — On complète les notations des §§3.1 à 3.3. Soit S un k -schéma et \mathcal{E} un H -torseur sur S . Soit

$$\mathrm{Aut}_G(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times_k^{G, \mathrm{Int}} G$$

le schéma en groupes sur S des automorphismes G -équivalents de \mathcal{E} .

Soit V un k -espace vectoriel de dimension finie. Pour toute représentation algébrique linéaire

$$\rho : G \rightarrow GL(V),$$

soit

$$\rho(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times_k^{G, \rho} V$$

le fibré vectoriel sur S que l'on obtient en poussant ρ par la représentation ρ .

Lorsque \mathcal{E} est un G -torseur sur $C_S = C \times_k S$ (où C est la courbe du §3.2) on pose

$$\rho_D(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times_{C_S}^{G, \rho} V_{D, S}$$

où $V_{D, S} = V_D \times_k S$ est le fibré vectoriel sur C_S déduit du fibré vectoriel V_D sur C (cf. §3.3) par changement de base.

4.2. Trivialisation générique des G -torseurs. — Soit K une extension de k et \mathcal{E} un G -torseur sur C_K . Dans la suite, on fera appel plusieurs fois au lemme suivant.

Lemme 4.1. — *Il existe K' une extension finie de K telle que le G -torseur $\mathcal{E} \times_{C_K} C_{K'}$ soit trivial au point générique de $C_{K'}$.*

Démonstration. — Clairement, il suffit de prouver le lemme lorsque K est algébriquement clos. Dans ce cas, F le corps des fonctions de C_K , est de dimension ≤ 1 . Soit F_s une clôture séparable de F . Le toseur \mathcal{E} , qui est lisse sur C_K , admet des sections au-dessus de F_s . Comme G est connexe et que F est de dimension ≤ 1 , on sait que l'ensemble $H^1(F_s/F, G)$ est réduit à la classe triviale (cf. [27] chap. III §2 théorème 1' et les remarques qui suivent). \square

4.3. Réductions des toseurs à un sous-groupe. — On reprend les notations du paragraphe précédent. Soit P un sous-groupe algébrique de G . Une réduction du G -torseur \mathcal{E} sur S à P est la donnée d'un P -torseur \mathcal{E}_P sur S et d'un isomorphisme du G -torseur

$$\mathcal{E}_P \times^P G,$$

où G est muni de l'action de P par translation à gauche, sur \mathcal{E} . Le morphisme P -équivalent évident $\mathcal{E}_P \rightarrow \mathcal{E}_P \times^P G \simeq \mathcal{E}$ donne, par passage au quotient par P , une section

$$\sigma_P : S \rightarrow \mathcal{E}/P.$$

Réciproquement, \mathcal{E} est un P -torseur au-dessus de \mathcal{E}/P qui, lorsqu'on le tire en arrière par une section de \mathcal{E}/P , donne une réduction de \mathcal{E} à P . De cette manière, on obtient une bijection naturelle entre les sections de \mathcal{E}/P et les classes d'isomorphisme de réductions de \mathcal{E} à P .

4.4. Morphisme caractéristique. — Rappelons qu'on a fixé en §3.2 une courbe C sur k et un point $\infty \in C(k)$. Soit S un k -schéma et C_S et ∞_S les objets obtenus par changement de base. Soit \mathcal{E} un G -torseur sur C_S . La construction du paragraphe 4.1 donne un fibré vectoriel $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ sur C_S . Le morphisme caractéristique défini en §2.2 (2.1)

$$\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{car}$$

est G -invariant et $\mathbb{G}_{m, k}$ -équivalent. Il induit donc un morphisme par abus encore noté χ

$$\chi : \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{car}_{D, S}$$

et donc un morphisme toujours noté de la même façon

$$\chi : H^0(C_S, \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(C_S, \mathrm{car}_{D,S}).$$

Le schéma en groupes $\mathrm{Aut}_G(\mathcal{E})$ agit sur le fibré $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ par l'action adjointe. Pour toute section $\theta \in H^0(C_S, \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}))$, soit

$$\mathrm{Aut}_G(\mathcal{E}, \theta)$$

le sous-schéma en groupes de $\mathrm{Aut}_G(\mathcal{E})$ qui centralise θ .

4.5. Le champ algébrique de Hitchin. — Introduisons la définition suivante.

Définition 4.2. — Le champ de Hitchin \mathcal{M}_G est le k -champ algébrique dont la catégorie fibre en un k -schéma S est le groupoïde dont les objets sont les triplets (\mathcal{E}, θ, t) qui vérifient les conditions suivantes :

1. \mathcal{E} est un G -torseur sur $C \times_k S$;
2. θ est une section du fibré vectoriel $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$;
3. t appartient à $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}(S)$ et satisfait

$$\chi(\theta)(\infty_S) = \chi(t)$$

et l'ensemble des morphismes d'un objet (\mathcal{E}, θ, t) sur un autre $(\mathcal{E}', \theta', t')$ est

- vide si $t \neq t'$;
- l'ensemble des isomorphismes G -équivalents de \mathcal{E} sur \mathcal{E}' tels que l'isomorphisme induit de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ sur $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}')$ envoie θ sur θ' .

Remarque. — Ce n'est pas la définition usuelle du champ de Hitchin qui ne considère que des couples (\mathcal{E}, θ) . Ici la donnée supplémentaire d'un élément t qui est G -régulier force la section θ à être semi-simple régulière en ∞_S et donc à l'être aussi génériquement. Le morphisme d'oubli de t fait de notre champ de Hitchin un revêtement étale et galoisien de groupe W d'un ouvert du champ de Hitchin usuel.

4.6. La fibration de Hitchin. — Il s'agit là du morphisme

$$f_G : \mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{A}_G$$

défini pour tout k -schéma S et tout triplet $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$ dans $\mathcal{M}(S)$ par

$$f(m) = (\chi(\theta), t).$$

Dans la suite, on omet le plus souvent l'indice G et on note le morphisme ci-dessus ainsi

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}.$$

4.7. Soit K une extension de k et $P \in \mathcal{F}$ un sous-groupe parabolique semi-standard. Soit \mathcal{E} un P -torseur sur C_K . Soit Ad l'action adjointe de P sur son algèbre de Lie \mathfrak{p} . La construction du paragraphe 4.1 appliquée au groupe P fournit un fibré vectoriel $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ sur C_K . Le morphisme caractéristique défini en §2.6 (2.2)

$$\chi_P : \mathfrak{p} \rightarrow \mathrm{car}_P$$

est P -invariant et $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivalent. Il induit donc des morphismes par abus encore notés χ_P

$$\chi_P : \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}) \rightarrow \mathrm{car}_{P,D,S}$$

et

$$\chi_P : H^0(C_S, \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(C_S, \mathrm{car}_{P,D,S}).$$

4.8. Réduction à un sous-groupe parabolique. — Soit S un k -schéma affine et $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(S)$. Introduisons la définition suivante.

Définition 4.3. — On appelle réduction de m à P tout triplet $m_P = (\mathcal{E}_P, \theta_P, t_P)$ formé de

- une réduction \mathcal{E}_P de \mathcal{E} à P autrement dit un P -torseur \mathcal{E}_P sur $C \times_k S$ muni d'un isomorphisme

$$(4.1) \quad \mathcal{E}_P \times_k^P G \simeq \mathcal{E} ;$$

- une section θ_P de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_P)$ sur $C \times_k S$;
- un point $t_P \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}(S)$ qui vérifie

$$\chi_P(\theta_P)(\infty_S) = \chi_P(t_P)$$

qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. l'isomorphisme, qui se déduit de (4.1),

$$\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_P \times_k^P G) \simeq \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$$

composé avec le morphisme

$$\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_P) \hookrightarrow \mathcal{E}_P \times_k^{P, \mathrm{Ad}} \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_P \times_k^P G)$$

envoie la section θ_P sur θ ;

2. les points t_P et t sont égaux.

Dans la suite, on dit que deux réduction $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$ et $(\mathcal{E}'_P, \theta'_P, t)$ de m sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de P -torseurs de \mathcal{E}_P sur \mathcal{E}'_P tel que l'isomorphisme qui s'en déduit $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_P) \rightarrow \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}'_P)$ envoie θ sur θ' .

4.9. Existence de réductions sur un ouvert. — Soit S un k -schéma test et $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(S)$. Soit $M \in \mathcal{L}$ et $(a_M, t) \in \mathcal{A}_M(S)$ tels que

$$f(m) = \chi_G^M((a_M, t)).$$

Soit U l'ouvert de C_S , image réciproque par a_M de l'ouvert $\mathrm{car}_M^{\mathrm{reg}}$. Soit X une section de $\mathfrak{m} \times_k U$ tel que $\chi_M(X)$ coïncide avec a_M sur l'ouvert U . L'existence d'une section de Kostant assure qu'une telle section existe. Notons que X est partout semi-simple G -régulier. Soit T_X le sous-schéma en tores de M_U centralisateur de X dans G_U . Introduisons alors \mathcal{E}' le U -schéma défini ainsi : pour U -schéma Ω , l'ensemble des sections de \mathcal{E}' au-dessus de Ω est l'ensemble des sections de \mathcal{E} au-dessus de Ω telles que l'isomorphisme $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_\Omega) \rightarrow \mathfrak{g} \times_k \Omega$ qui s'en déduit envoie θ_Ω sur X_Ω . Comme localement pour la topologie étale les sous-schémas en tores de $G \times_k U$ sont conjugués au tore constant $T \times_k U$ et qu'on a l'égalité

$$\chi_G(\theta) = \chi_G^M(a_M) = \chi_G(X)$$

sur U , on voit que \mathcal{E}' possède des sections localement pour la topologie étale. Il est clair alors que \mathcal{E}' est un T_X -torseur sur U qui devient, une fois poussé par le morphisme $T_X \rightarrow G_U$, isomorphe à \mathcal{E}_U . En particulier, pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}(M)$ soit \mathcal{E}_P le P -torseur sur U qu'on déduit de \mathcal{E}' en poussant par le morphisme $T_X \rightarrow P_U$. On vérifie alors que $(\mathcal{E}_P, \theta_U, t_U)$ est une réduction à P (en un sens évident) du triplet déduit de (\mathcal{E}, θ, t) par changement de base à U .

4.10. Voici le principal résultat sur l'existence et l'unicité de réductions à un sous-groupe parabolique d'un triplet de Hitchin sur le spectre d'un corps K extension de k .

Proposition 4.4. — Soit $m \in \mathcal{M}(K)$ et $M \in \mathcal{L}$ tel que $f(m) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \mathrm{ell}}(K))$ (cf. proposition 3.4). Soit $P \in \mathcal{F}$. On a l'alternative suivante :

- soit P ne contient pas M : il n'y a alors aucune réduction de m à P ;
- soit P contient M : dans ce cas, il existe une et une seule réduction de m à P (à isomorphisme près).

Démonstration. — Soit $P \in \mathcal{F}$. Montrons que la condition $M \subset P$ est nécessaire à l'existence d'une réduction à P . Soit $m_P = (\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$ une réduction de m à P . Le couple $(\chi_P(\theta_P), t)$ définit un élément de $\mathcal{A}_{M_P}(K)$ dont l'image dans $\mathcal{A}_G(K)$ est égale à $f(m)$. L'hypothèse $f(m) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(K))$ et la proposition 3.4 impliquent qu'on a $M \subset M_P$ d'où $M \subset P$.

On suppose désormais $M \subset P$. Montrons tout d'abord l'existence d'une réduction à P . La construction du paragraphe §4.9 fournit une réduction de m à P mais seulement sur un ouvert U de C_K . Il s'agit alors de voir que cette réduction se prolonge autrement dit que le torseur P -torseur \mathcal{E}_P se prolonge à C_K . Par la bijection décrite au §4.3, il revient au même de montrer que la section $U \rightarrow \mathcal{E}/P$ déduite de \mathcal{E}_P se prolonge à tout C_K . Or une telle section se prolonge par propriété du quotient \mathcal{E}/P sur C d'où l'existence.

Montrons enfin l'unicité d'une réduction de m à P . Soit $m_P = (\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$ $m'_P = (\mathcal{E}'_P, \theta'_P, t)$ deux telles réductions. Soit σ_P et σ'_P les sections de \mathcal{E}/P déduites de \mathcal{E}_P et \mathcal{E}'_P par la construction décrite au §4.3. Il s'agit de prouver que ces sections sont égales et il suffit, par propriété de \mathcal{E}/P sur C_K , de le prouver au point générique $\text{Spec}(F)$ de C_K et même au point $\text{Spec}(F_s)$ où F_s est une clôture séparable du corps des fonctions F de la courbe C_K .

Or section σ_P donne une section $\text{Spec}(F_s) \rightarrow \mathcal{E}/P$ et celle-ci est la $P(F_s)$ -orbite de l'image d'un point $e \in \mathcal{E}_P(F_s)$ par le morphisme $\mathcal{E}_P \rightarrow \mathcal{E}$. Un tel point $e \in \mathcal{E}_P(F_s)$ donne un isomorphisme P -équivalent

$$\Phi_P : \mathcal{E}_{P, F_s} \rightarrow P \times_k F_s$$

un isomorphisme de schémas en groupes

$$\iota_P : \text{Aut}_P(\mathcal{E}_{F_s}) \rightarrow P \times_k F_s$$

et un isomorphisme dérivé

$$d\iota_P : \text{Ad}_P(\mathcal{E}_{F_s}) \rightarrow \mathfrak{p} \times_k F_s.$$

Soit $Y = d\iota_P(\theta_{F_s}) \in \mathfrak{p}(F_s)$. Par définition de la réduction, $\chi_P(Y)$ est égal à a_{M, F_s} la restriction de la section $a_M : C \rightarrow \mathfrak{c}_M$ à $\text{Spec}(F_s)$. En utilisant la proposition 3.8 pour le groupe non pas G mais M , on obtient l'existence de $X \in \mathfrak{m}(F)$ semi-simple tel que

1. $\chi_M(X)$ est égal à la restriction $a_{M, F}$ de a_M au point générique;
2. il existe $m \in M(F_\infty)$ tel que $\text{Ad}(m)X = t_a$ où $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}(\mathcal{O}_\infty)$ relève t et vérifie $\chi_M(t_a) = t$.

Notons que comme $a_{M, F}$ appartient à $\text{car}_M^{G\text{-reg}}$, les éléments X et t_a sont automatiquement G -réguliers. Comme on a l'égalité $\chi_P(Y) = \chi_P(X)$ dans $\text{car}_M^{G\text{-reg}}(F_s)$, par le lemme 3.6 les éléments X et Y sont conjugués sous $P(F_s)$. Quitte à translater e par un élément de $P(F_s)$ on peut et on va supposer que $Y = X$. L'image de e dans $\mathcal{E}(F_s)$ donne un isomorphisme G -équivalent

$$(4.2) \quad \Phi : \mathcal{E}_{F_s} \rightarrow G \times_k F_s$$

un isomorphisme de schémas en groupes

$$(4.3) \quad \iota : \text{Aut}_G(\mathcal{E}_{F_s}) \rightarrow G \times_k F_s$$

et un isomorphisme dérivé

$$(4.4) \quad d\iota : \text{Ad}_G(\mathcal{E}_{F_s}) \rightarrow \mathfrak{g} \times_k F_s.$$

Ce dernier est tel que $X = d\iota(\theta)$ est un élément de $\mathfrak{m}(F)$ semi-simple G -régulier qui vérifie les assertions 1 et 2 ci-dessus. Notons par un $'$ les mêmes objets attachés à la réduction m'_P . Soit $x \in G(F_s)$ tel que $e' = e \cdot x$. L'automorphisme de $\mathfrak{g} \times_k F_s$ donné par $d\iota' \circ d\iota^{-1}$ est alors égal à $\text{Ad}(x)$. Par conséquent, $\text{Ad}(x)X = X'$. On a donc les égalités

$$t_a = \text{Ad}(m')X' = \text{Ad}(m'x)X = \text{Ad}(m'xm^{-1})t_a$$

ce qui implique $m'xm^{-1} \in T(F_\infty \otimes_F F_s)$ puisque t_a est G -régulier. Il s'ensuit qu'on a $x \in M(F_s)$. Donc les sections σ_P et σ'_P coïncident au point générique. Ainsi il existe un isomorphisme de \mathcal{E}_P sur \mathcal{E}'_P . Avec les notations précédentes, on a vu que X et X' sont conjugués sous $M(F_s)$. Donc on peut choisir cet isomorphisme de sorte que θ_P s'envoie sur θ'_P (au moins au point $\text{Spec}(F_s)$ donc partout). Cela termine la démonstration de l'unicité et de la proposition. \square

5 Convexe associé à un triplet de Hitchin.

5.1. Pour tout groupe M défini sur k soit $X^*(M)$ le groupe des caractères rationnels de M et

$$X_*(M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{Z}).$$

Lorsque M est un tore, on note $X_*(M)$ s'identifie au groupe des cocaractères de M par la dualité naturelle entre les groupes de caractères et de cocaractères.

Soit $M \in \mathcal{L}$ un sous-groupe de Levi semi-standard et soit A_M la composante neutre du centre de M . Le morphisme de restriction

$$X^*(M) \rightarrow X^*(A_M)$$

est injectif et son conoyau est fini. Soit \mathfrak{a}_M^* le \mathbb{R} -espace vectoriel défini par

$$\mathfrak{a}_M^* = X^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = X^*(A_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Son dual noté \mathfrak{a}_M s'identifie à

$$\mathfrak{a}_M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{R}).$$

On ne confondra pas \mathfrak{a}_M avec l'algèbre de Lie de A_M qui est aussi celle du centre Z_M de M et qui sera notée \mathfrak{z}_M . Pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$, les morphismes de restriction

$$X^*(L) \rightarrow X^*(M) \rightarrow X^*(A_L)$$

induisent des morphismes

$$\mathfrak{a}_L^* \rightarrow \mathfrak{a}_M^* \rightarrow \mathfrak{a}_L^*$$

dont le composé est l'identité. De la sorte, \mathfrak{a}_L^* s'identifie à un sous-espace de \mathfrak{a}_M^* . Soit

$$(\mathfrak{a}_M^L)^* = \text{Ker}(\mathfrak{a}_M^* \rightarrow \mathfrak{a}_L^*).$$

On a donc une décomposition

$$\mathfrak{a}_M^* = \mathfrak{a}_L^* \oplus (\mathfrak{a}_M^L)^*$$

d'où dualement une décomposition

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_L \oplus \mathfrak{a}_M^L$$

où \mathfrak{a}_M^L est l'orthogonal de \mathfrak{a}_L^* dans \mathfrak{a}_M . Tout $\xi \in \mathfrak{a}_M$ s'écrit

$$(5.1) \quad \xi = \xi_L + \xi^L$$

suivant cette décomposition.

On généralise les définitions précédentes à un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}$ de la façon suivante. Soit $A_P = A_{M_P}$ et $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$. Soit $Q \in \mathcal{F}(P)$ et $\mathfrak{a}_P^Q = \mathfrak{a}_{M_P}^{M_Q}$; On note par un exposant $*$ le dual de \mathfrak{a}_P^Q . On a donc une décomposition

$$\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_P^Q \oplus \mathfrak{a}_Q$$

et tout $\xi \in \mathfrak{a}_P$ s'écrit

$$(5.2) \quad \xi = \xi^Q + \xi_Q$$

suivant cette décomposition.

5.2. Soit $B \in \mathcal{F}(T)$ un sous-groupe de Borel de G . Soit Δ_B l'ensemble des racines simples de T dans B . Soit Δ_B^\vee l'ensemble des coracines simples. Les parties Δ_B et Δ_B^\vee forment des bases respectives des espaces \mathfrak{a}_T^* et \mathfrak{a}_T .

Soit $P \in \mathcal{F}(B)$ et $\Delta_{P,B} \subset \Delta_B$ le sous-ensemble formé de racines dans N_P . Soit $\Delta_{P,B}^\vee \subset \Delta_B^\vee$ le sous-ensemble correspondant de coracines. L'application de restriction $X^*(T) \rightarrow X^*(A_P)$ induit une bijection de $\Delta_{P,B}$ sur un ensemble noté Δ_P . De même, la projection $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_P$ induit une bijection de $\Delta_{P,B}^\vee$ sur une partie notée Δ_P^\vee . Comme tout sous-groupe de Borel inclus dans P qui contient T appartient à l'orbite de B sous le groupe de Weyl $W^{M_P}(T)$, les ensembles Δ_P et Δ_P^\vee ne dépendent pas du choix de B . En outre, Δ_P et Δ_P^\vee forment des bases respectives de \mathfrak{a}_P^* et \mathfrak{a}_P . Soit $\hat{\Delta}_P$ la base de \mathfrak{a}_P^* duale de Δ_P^\vee .

Lemme 5.1. — Soit $Q \in \mathcal{F}(P)$. On a alors l'inclusion naturelle $\hat{\Delta}_Q \subset \hat{\Delta}_P$.

Démonstration. — Soit $B \subset P$ un sous-groupe de Borel qui contient T . On a l'inclusion $\Delta_{Q,B}^\vee \subset \Delta_{P,B}^\vee$ et le complémentaire $\Delta_{P,B}^\vee - \Delta_{Q,B}^\vee$ est inclus dans \mathfrak{a}_T^Q . Soit $\Delta_{Q,P}^\vee$ l'image de $\Delta_{Q,B}^\vee$ par la projection $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_P$. Le complémentaire $\Delta_P^\vee - \Delta_{Q,P}^\vee$ est alors inclus dans \mathfrak{a}_P^Q . La projection $\mathfrak{a}_P \rightarrow \mathfrak{a}_Q$ induit une bijection de $\Delta_{Q,P}^\vee$ sur Δ_Q^\vee .

Soit $\varpi \in \hat{\Delta}_Q \subset \mathfrak{a}_Q^*$. Soit $\alpha^\vee \in \Delta_Q^\vee$ tel que $\varpi(\alpha^\vee) = 1$ et ϖ est nul sur $\Delta_Q^\vee - \{\alpha^\vee\}$. Soit $\beta^\vee \in \Delta_P^\vee$. On a alors l'alternative suivante. Soit $\beta^\vee \notin \Delta_{Q,P}^\vee$ et alors $\varpi(\beta^\vee) = 0$. Soit $\beta^\vee \in \Delta_{Q,P}^\vee$ et alors $\varpi(\beta^\vee)$ vaut 1 si β^\vee est l'unique élément de $\Delta_{Q,P}^\vee$ et 0 sinon. Cela prouve que $\varpi \in \hat{\Delta}_P$. \square

5.3. Cônes dans \mathfrak{a}_P . — Soit $P \in \mathcal{F}$. Soit ${}^+\mathfrak{a}_P$ le cône *obtus*, ouvert dans \mathfrak{a}_P , défini par

$${}^+\mathfrak{a}_P = \{H \in \mathfrak{a}_P \mid \varpi(H) > 0 \ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P\}.$$

Soit $\overline{{}^+\mathfrak{a}_P}$ l'adhérence de ${}^+\mathfrak{a}_P$ dans \mathfrak{a}_T c'est-à-dire

$$\overline{{}^+\mathfrak{a}_P} = \{H \in \mathfrak{a}_P \mid \varpi(H) \geq 0 \ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P\}.$$

Lemme 5.2. — Soit $P \subsetneq G$ un sous-groupe parabolique semi-standard. On a les assertions suivantes :

1. pour tout $Q \in \mathcal{F}(P)$ on a ${}^+\mathfrak{a}_P \subset {}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_P^Q$;
2. le cône ${}^+\mathfrak{a}_P$ est l'intersection des cônes ${}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_P^Q$ lorsque Q parcourt les sous-groupes paraboliques propres maximaux de G qui contiennent P .

Ces assertions valent aussi pour les cônes fermés.

Démonstration. — Soit $Q \in \mathcal{F}(P)$. Il est clair qu'on a

$${}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_P^Q = \{H \in \mathfrak{a}_P \mid \varpi(H) > 0 \ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_Q\}.$$

La première assertion résulte alors de l'inclusion $\hat{\Delta}_Q \subset \hat{\Delta}_P$ du lemme 5.1. Pour montrer la seconde assertion, il suffit d'après la première assertion de prouver que l'intersection des cônes ${}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_P^Q$ lorsque Q parcourt les éléments maximaux de $\mathcal{F}(P)$ est inclus dans ${}^+\mathfrak{a}_P$. Soit H dans cet intersection. Il s'agit de voir que $\varpi(H) > 0$ pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_P$. Mais c'est évident car pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_P$ il existe un unique sous-groupe parabolique Q propre et maximal qui contient P tel que $\hat{\Delta}_Q = \{\varpi\}$. \square

5.4. Degré d'une réduction. — Soit K une extension de k , $m \in \mathcal{M}(K)$ un triplet de Hitchin, $P \in \mathcal{F}$ un sous-groupe parabolique semi-standard et $m_P = (\mathcal{E}, \theta, t)$ une réduction de m à P (cf. définition 4.3). Le *degré* de la réduction m_P est l'unique élément $\deg(m_P) \in \mathfrak{a}_P$ qui satisfait pour tout caractère $\mu \in X^*(P)$ l'égalité suivante

$$\mu(\deg(m_P)) = \deg(\mu(\mathcal{E}))$$

où $\mu(\mathcal{E})$ est le fibré en droites sur C_K obtenu lorsqu'on pousse le torseur \mathcal{E} par la représentation

$$\mu : P \rightarrow \mathrm{GL}(1)$$

et $\deg(\mu(\mathcal{E}))$ est son degré.

Lemme 5.3. — Soit $P \in \mathcal{F}$ et m_P une réduction de m à P . Soit $Q \in \mathcal{F}(Q)$ et m_Q une réduction de m à Q . Alors le degré $\deg(m_Q)$ est égal à la projection de $\deg(m_P)$ sur \mathfrak{a}_Q suivant la décomposition $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_P^Q$.

Démonstration. — Rappelons que la réduction m_P est un certain triplet $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$ (cf. définition 4.3). Soit \mathcal{E}_Q défini par $\mathcal{E}_P \times_k^P Q$ et θ_Q la section de $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)$ obtenue lorsqu'on compose θ_P avec le morphisme $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_P) \hookrightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)$. On vérifie que le triplet $(\mathcal{E}_Q, \theta_Q, t)$ est une réduction de m à Q donc il est isomorphe à m_Q (cf. proposition 4.4). Soit $\mu \in X^*(Q)$. Il est clair que $\mu(\mathcal{E}_Q)$ est isomorphe à $\mu(\mathcal{E}_P)$. On a donc

$$\mu(\deg(m_P)) = \deg(\mu(\mathcal{E}_P)) = \deg(\mu(\mathcal{E}_Q)) = \mu(\deg(m_Q)).$$

Il s'ensuit que $\deg(m_P) - \deg(m_Q)$ appartient à \mathfrak{a}_P^Q d'où le lemme. \square

5.5. Convexes associés à un triplet de Hitchin. — On poursuit avec les notation sur paragraphe précédent. Soit M l'unique sous-groupe de Levi semi-standard tel que $f(m)$ appartienne à $\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(K)$ (cf. proposition 3.4). Pour tout P dans l'ensemble $\mathcal{F}(M)$ des sous-groupes paraboliques de G contenant M soit m_P l'unique réduction de m à P (cf. 4.4) et soit

$${}^+\mathcal{C}_{P,m} = -\deg(m_P) - {}^+\mathfrak{a}_P + \mathfrak{a}_T^P$$

le cylindre ouvert de \mathfrak{a}_T de base la chambre obtuse $-\deg(m_P) - {}^+\mathfrak{a}_P$ et

$$\overline{{}^+\mathcal{C}_{P,m}} = -\deg(m_P) - \overline{{}^+\mathfrak{a}_P} + \mathfrak{a}_T^P$$

son adhérence dans \mathfrak{a}_T . Notons que, pour $P = G$, on a ${}^+\mathcal{C}_{G,m} = \mathfrak{a}_T$.

Soit \mathcal{C}_m le polyèdre ouvert inclus dans \mathfrak{a}_T défini par

$$\mathcal{C}_m = \bigcap_{P \in \mathcal{F}(M)} {}^+\mathcal{C}_{P,m}$$

et soit

$$\overline{\mathcal{C}_m} = \bigcap_{P \in \mathcal{F}(M)} \overline{{}^+\mathcal{C}_{P,m}}$$

son adhérence.

Si $M = G$ alors $\mathcal{F}(G) = \{G\}$ et $\mathcal{C}_m = \overline{\mathcal{C}_m} = \mathfrak{a}_T$.

Remarques. — Nous verrons une définition équivalente des polyèdres précédents à la proposition 5.8. Ces définitions sont directement suggérées par la définition d'Arthur des poids qui interviennent dans la définition des intégrales orbitales pondérées (cf. [1] §§2,3). Le lien avec les constructions d'Arthur sera plus évident lorsque nous disposerons d'une description adélique des triplets de Hitchin (cf. section 7.6). Lorsque $M = T$, on retrouve le "polyèdre complémentaire" que Behrend associe au schéma en groupes $\text{Aut}_G(\mathcal{E})$ et au tore T (cf. [7]§6).

Proposition 5.4. — Avec les notations ci-dessus, dans la définition de \mathcal{C}_m ou $\overline{\mathcal{C}_m}$, on peut remplacer $\mathcal{F}(M)$ par $\mathcal{P}(M)$. Si $M \subsetneq G$ on peut remplacer $\mathcal{F}(M)$ par les éléments maximaux de $\mathcal{F}(M) - \{G\}$.

Démonstration. — C'est une conséquence évidente du lemme suivant. \square

Lemme 5.5. — Soit $P \in \mathcal{F}(M)$ un sous-groupe parabolique semi-standard. On a les assertions suivantes :

1. pour tout $Q \in \mathcal{F}(P)$ on a ${}^+\mathcal{C}_{P,m} \subset {}^+\mathcal{C}_{Q,m}$;

2. le cône ${}^+\mathcal{C}_{P,m}$ est l'intersection des cônes ${}^+\mathcal{C}_{Q,m}$ lorsque Q parcourt les sous-groupes paraboliques propres maximaux de G qui contiennent P .

Ces assertions valent aussi pour les cônes fermés.

Démonstration. — Soit $Q \in \mathcal{F}(P)$. Le lemme 5.3 implique qu'on a l'égalité

$${}^+\mathcal{C}_{Q,m} = -\deg(m_P) - {}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_T^Q.$$

Le lemme est alors une conséquence immédiate du lemme 5.2. \square

5.6. Soit S un k -schéma affine et $m \in \mathcal{M}(S)$. Pour tout $s \in S$, soit $m_s \in \mathcal{M}(k(s))$ le triplet de Hitchin sur $k(s)$ le corps local en s déduit de m par changement de base. Soit \mathcal{C}_m , resp. $\overline{\mathcal{C}}_m$, l'application sur S qui à tout $s \in S$ associe le convexe ouvert \mathcal{C}_{m_s} , resp. le convexe fermé $\overline{\mathcal{C}}_{m_s}$.

Proposition 5.6. — Supposons S noethérien. L'application \mathcal{C}_m de $\mathcal{M}(k(s))$ dans l'ensemble des parties de \mathfrak{a}_T ordonné par l'inclusion est semi-continue inférieurement c'est-à-dire pour toute partie Ξ de \mathfrak{a}_T l'ensemble

$$\{s \in S \mid \Xi \subset \mathcal{C}_{m_s}\}$$

est ouvert. Il en est de même pour l'application $\overline{\mathcal{C}}_m$.

Démonstration. — Soit $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(S)$. On ne traite que l'application \mathcal{C}_m car la même démonstration s'applique à $\overline{\mathcal{C}}_m$.

Montrons tout d'abord que \mathcal{C}_m est constructible et ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur S . Pour cela, quitte à remplacer S par une composante irréductible, on suppose que S est irréductible. Soit η le point générique de S et $C_\eta = C \times_k k(\eta)$. Soit $m_\eta = (\mathcal{E}_\eta, \theta_\eta, t_\eta)$ le triplet de Hitchin sur C_η déduit de m par le changement de base $\text{Spec}(k(\eta)) \rightarrow S$. Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que $f(m_\eta) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(k(\eta)))$ (cf. proposition 3.4). Soit $P \in \mathcal{F}(M)$ et $m_{P,\eta} = (\mathcal{E}_{P,\eta}, \theta_\eta, t_\eta)$ "la" réduction de m_η à P (cf. proposition 4.4). On a associé au §4.3 à la P -réduction $\mathcal{E}_{P,\eta}$ une section $C_\eta \rightarrow \mathcal{E}_\eta/P$. Celle-ci se prolonge à tout C_S privé d'un certain fermé. L'image de ce fermé par le morphisme propre $C_S \rightarrow S$ est un fermé qui ne contient pas le point générique η . Soit U le complémentaire de ce fermé de S . Par construction, la section $C_\eta \rightarrow \mathcal{E}_\eta/P$ se prolonge en une section $C_U \rightarrow \mathcal{E}_\eta/P$. En utilisant la bijection du §4.3, on déduit de cette section un P -torseur $\mathcal{E}_{P,U}$ qui est un prolongement de $\mathcal{E}_{P,\eta}$ et qui est une réduction de \mathcal{E}_U à P . On en déduit que le triplet $(\mathcal{E}_{P,U}, \theta_U, t_U)$ est une réduction de m à P sur U . Il s'ensuit que l'application qui à $u \in U$ associe le degré de $m_{P,u}$ est constante. Quitte à réduire U , l'application précédente est constante pour tout $P \in \mathcal{F}(M)$. Quitte à réduire encore U , on peut supposer que $f(m_u) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(k(u)))$ pour tout $u \in U$. Mais alors l'application \mathcal{C}_m est constante sur U . Par récurrence noethérienne, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs et il existe une partition de S en des ensembles constructibles sur lesquels \mathcal{C} est constante.

Montrons ensuite que pour tout $\Xi \subset \mathfrak{a}_T$ l'ensemble

$$\{s \in S \mid \Xi \subset \mathcal{C}_{m_s}\}$$

est ouvert. D'après ce qui précède, il est constructible. Il suffit donc de montrer qu'il est stable par généralisation. Pour cette question, on peut supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Soit s le point spécial et η le point générique de S . Il suffit de montrer l'inclusion

$$(5.3) \quad \mathcal{C}_{m_s} \subset \mathcal{C}_{m_\eta}.$$

Soit $(a, t) = f(m) \in \mathcal{A}_G(S)$. Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que (a_η, t_η) appartienne à $\chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(k(\eta)))$ (cf. proposition 3.4). Comme le morphisme χ_G^M est une immersion fermée (cf. proposition 3.2), il existe un couple $(a_M, t) \in \mathcal{A}_M(S)$ d'image (a, t) dans $\mathcal{A}_G(S)$. Si $M = G$ l'inclusion (5.3) est triviale puisqu'alors $\mathcal{C}_{m_\eta} = \mathfrak{a}_T$. Supposons donc $M \subsetneq G$. En utilisant la proposition 5.4, on voit qu'il suffit de montrer que pour tout $P \in \mathcal{F}(M)$ maximal, on a

$${}^+\mathcal{C}_{P,m_s} \subset {}^+\mathcal{C}_{P,m_\eta}$$

ce qui revient à montrer que

$$\varpi(\deg(m_{P,s}) - \deg(m_{P,\eta})) \geq 0$$

où ϖ est l'unique élément de $\hat{\Delta}_P$. Soit

$$\rho : G \rightarrow V$$

la représentation irréductible de dimension finie de plus haut poids ϖ . Soit $V_\varpi \subset V$ la droite engendrée par un vecteur de plus haut poids ϖ . En particulier, cette droite est stable sous l'action de P .

Soit U l'ouvert de C_S défini comme l'image réciproque par a_M de l'ouvert G -régulier $\mathbf{car}_M^{\text{reg}}$. On a construit au §4.9 un triplet $(\mathcal{E}_{P,U}, \theta_U, t_U)$ formé d'une réduction à P du triplet déduit de m par changement de base à U . On déduit de $\mathcal{E}_{P,U}$ une section $U \rightarrow \mathcal{E}/P$ qui, par projectivité de \mathcal{E}/P , se prolonge à un ouvert $U_1 \supset U$ qui contient tous les points de codimension ≤ 1 de C_S . Notons que U_1 contient C_η ainsi que le point générique de C_s . On obtient alors un P -torseur \mathcal{E}_{P,U_1} qui prolonge $\mathcal{E}_{P,U}$ (cf. §4.3). On vérifie que le triplet $(\mathcal{E}_{P,U_1}, \theta_{U_1}, t_{U_1})$ est une réduction de m à P sur U_1 .

Le fibré en droite $\mathcal{E}_{P,U_1} \times_k^{P,\rho} V_\varpi$ est un sous-faisceau localement facteur direct de la restriction à U_1 du fibré vectoriel $\rho(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times_k^{P,\rho} V$. Il se prolonge de manière unique en un fibré en droites \mathcal{V}_ϖ qui est un sous-faisceau de $\rho(\mathcal{E})$. Toutefois, il se peut que hors de U_1 ce fibré ne soit pas localement facteur direct. Comme U_1 contient C_η on a l'égalité

$$(5.4) \quad \deg(\mathcal{V}_{\varpi,\eta}) = \varpi(\deg(m_{P,\eta})).$$

Sur l'ouvert $U_1 \cap C_s$ de C_s , on obtient par restriction du triplet $(\mathcal{E}_{P,U_1}, \theta_{U_1}, t_{U_1})$ une réduction de m_s à P . Toujours par les mêmes arguments, cette réduction se prolonge à C_s . On obtient donc un triplet $(\mathcal{E}_{P,s}, \theta_s, t_s)$. Le fibré en droites

$$\mathcal{V}'_{\varpi,s} = \mathcal{E}_{P,s} \times_k^{P,\rho} V_\varpi$$

est un sous-fibré localement facteur direct de $\rho(\mathcal{E}_s)$ et comme ci-dessus on a

$$(5.5) \quad \deg(\mathcal{V}'_{\varpi,s}) = \varpi(\deg(m_{P,s})).$$

Mais ce fibré $\mathcal{V}'_{\varpi,s}$ coïncide avec $\mathcal{V}_{\varpi,s}$ sur l'ouvert $U_1 \cap C_s$. Il s'ensuit que $\mathcal{V}'_{\varpi,s}$ est le saturé de $\mathcal{V}_{\varpi,s}$ dans $\rho(\mathcal{E}_s)$. On a donc

$$\deg(\mathcal{V}'_{\varpi,s}) \geq \deg(\mathcal{V}_{\varpi,s})$$

avec égalité si et seulement si $\mathcal{V}'_{\varpi,s} = \mathcal{V}_{\varpi,s}$. Avec (5.4) et (5.5) cela donne

$$\varpi(\deg(m_{P,s})) = \deg(\mathcal{V}'_{\varpi,s}) \geq \deg(\mathcal{V}_{\varpi,s}) = \varpi(\deg(m_{P,\eta})) = \varpi(\deg(m_{P,\eta}))$$

comme voulu. □

5.7. Réductions à des sous-groupes paraboliques adjacents. — Soit K une extension de k . Avant d'énoncer le principal résultat de ce paragraphe, nous allons l'illustrer dans le cas de $GL(2)$ muni de son sous-tore maximal standard T . Soit $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$ un triplet de Hitchin dans $\mathcal{M}_{GL(2)}(K)$. La donnée de (\mathcal{E}, θ) est équivalente à celle d'un fibré vectoriel \mathcal{V} de rang 2 sur C_K , d'un endomorphisme tordu

$$\theta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}(D)$$

encore noté θ . On suppose que $f(m)$ n'est pas elliptique. Il s'ensuit qu'au point générique η de C_K , l'endomorphisme θ est diagonal dans une base notée (e_1, e_2) de l'espace vectoriel \mathcal{V}_η . Soit $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}$ le sous-fibré en droites déterminé par e_i . Le point $t \in \mathfrak{t}(K) \simeq K^2$ s'écrit comme un couple $t = (t_1, t_2)$. Il y a une indétermination sur la numérotation des fibrés \mathcal{V}_i qui est levée lorsqu'on exige qu'au point ∞ l'endomorphisme θ ait comme valeur propre t_i sur l'espace $\mathcal{V}_{i,\infty}$.

Soit $B \subset GL(2)$ le sous-groupe de Borel standard et \overline{B} son opposé. Il résulte de la proposition 4.4 qu'il existe des réductions m_B et $m_{\overline{B}}$ de m à B et \overline{B} . On identifie \mathfrak{a}_T à \mathbb{R}^2 de manière évidente. On vérifie les formules suivantes

$$\deg(m_B) = (\deg(\mathcal{V}_1), \deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_1))$$

et

$$\deg(m_{\overline{B}}) = (\deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2), \deg(\mathcal{V}_2)).$$

Il s'ensuit qu'on a

$$(5.6) \quad \deg(m_{\overline{B}}) - \deg(m_B) = \text{long}(\mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2))(1, -1)$$

où la longueur notée long du module de torsion $\mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)$ est donnée par

$$\deg(\mathcal{V}) - \deg(\mathcal{V}_1) - \deg(\mathcal{V}_2)$$

vu que le morphisme entre fibrés de rang 1

$$\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{V}_2$$

est injectif.

Au point générique de C_K , on a une somme directe

$$\mathcal{V}_\eta = \mathcal{V}_{1,\eta} \oplus \mathcal{V}_{2,\eta}.$$

Soit p_i la projection sur $\mathcal{V}_{i,\eta}$. Celle-ci commute à θ qui agit sur le facteur $\mathcal{V}_{i,\eta}$ par la section globale λ_i de $\mathcal{O}(D)$. Soit $p_1(\mathcal{V})$ le fibré inversible image de \mathcal{V} par p_1 . La projection p_1 induit un isomorphisme de $\mathcal{V}/\mathcal{V}_2$ sur $p_1(\mathcal{V})$. La restriction de p_1 à \mathcal{V}_1 est injective et induit un isomorphisme de \mathcal{V}_1 sur un sous-faisceau de $p_1(\mathcal{V})$. De même, on introduit le fibré $p_2(\mathcal{V})$ et on obtient des isomorphismes

$$p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1 \simeq \mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \simeq p_2(\mathcal{V})/\mathcal{V}_2$$

compatibles aux endomorphismes tordus induit par θ . Or θ agit par les scalaires λ_1 sur $p_1(\mathcal{V})$ et λ_2 sur $p_2(\mathcal{V})$. Il s'ensuit que le scalaire $\lambda_1 - \lambda_2$, qui est nul puisque θ est régulier, agit par 0 sur $p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1$ d'où

$$(\lambda_1 - \lambda_2)p_1(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}_1(D)$$

dont on déduit l'inégalité

$$\text{long}(p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1) \leq 2 \deg(D)$$

soit encore

$$(5.7) \quad \text{long}(\mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)) \leq 2 \deg(D).$$

Ce sont les lignes (5.6) et (5.7) que nous allons généraliser à un groupe quelconque. Pour tout sous-groupe de Levi $M \in \mathcal{L}$, deux sous-groupes paraboliques P et Q dans $\mathcal{P}(M)$ sont dits *adjacents* si l'intersection

$$\Delta_P^\vee \cap (-\Delta_Q^\vee)$$

est réduite à un élément.

Lemme 5.7. — Soit $m \in \mathcal{M}(K)$ et $M \in \mathcal{L}$ tel que $f(m) \in \mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K)$.

Soit P et Q deux sous-groupes paraboliques adjacents dans $\mathcal{P}(M)$. Soit α^\vee l'unique coracine qui vérifie

$$\Delta_P^\vee \cap (-\Delta_Q^\vee) = \{\alpha^\vee\}.$$

Soit m_P et m_Q les réductions respectives de m à P et Q (cf. proposition 4.4).

Il existe un unique rationnel x_α tel que

$$(5.8) \quad -\deg(m_P) + \deg(m_Q) = x_\alpha \alpha^\vee.$$

En outre, x_α satisfait l'inégalité

$$(5.9) \quad 0 \leq x_\alpha \leq 2\mu(\alpha^\vee)^{-1}(\dim(\mathfrak{n}_P/(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{n}_Q)))^2 \dim(\mathfrak{q}/(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{n}_Q)) \deg(D).$$

où le caractère $\mu \in X^*(M)$ est donné par $\det(\mathrm{Ad}(\cdot)|_{\mathfrak{n}_P/(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{n}_Q)})$.

En particulier, x_α est borné sur $\mathcal{M}(K)$.

Remarques. — L'inégalité de gauche dans 5.9 est réminiscente du lemme 3.6 de [1]. Dans le contexte de la réduction de schémas en groupes réductifs à un sous-groupe de Borel, elle apparaît dans [7] proposition 6.6.

Démonstration. — Soit $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$ le point considéré de $\mathcal{M}(K)$. Soit $m_P = (\mathcal{E}_P, \theta, t)$ et $m_Q = (\mathcal{E}_Q, \theta, t)$ ses réductions à P et Q . L'énoncé est trivial si $M = G$. On suppose donc $M \subsetneq G$ dans la suite.

Soit $R \in \mathcal{F}(M)$ défini par $\hat{\Delta}_R = \hat{\Delta}_P - \{\alpha^\vee\}$. On a donc $\hat{\Delta}_R \cup \{-\alpha^\vee\} = \hat{\Delta}_Q$. Ainsi R contient P et Q . Pour tout caractère $\mu \in X^*(R)$, on a donc

$$\deg(\mu(m_R)) = \deg(\mu(m_P)) = \deg(\mu(m_Q)).$$

Par conséquent, $-\deg(m_P) + \deg(m_Q)$ appartient à l'espace \mathfrak{a}_M^R qui n'est autre que la droite engendrée par α^\vee . On obtient ainsi l'existence de x_α qui vérifie (5.8).

Il reste à vérifier l'inégalité (5.9). On commence par le cas où l'on a $R = G$ c'est-à-dire M est maximal dans G . Dans ce cas, $P \cap Q = M$. Pour alléger les notations, posons

$$\mathcal{V} = \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}),$$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{E}_P \times_k^{P, \mathrm{Ad}} \mathfrak{n},$$

où \mathfrak{n} est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P , et

$$\mathcal{V}_2 = \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_Q \times_k^{Q, \mathrm{Ad}} \mathfrak{q}.$$

Alors \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont deux sous-fibrés vectoriels du fibré vectoriel \mathcal{V} tels que $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = 0$. Au point générique de C_K , on a une somme directe

$$\mathcal{V}_\eta = \mathcal{V}_{1,\eta} \oplus \mathcal{V}_{2,\eta}.$$

Soit p_i la projection sur $\mathcal{V}_{i,\eta}$. La section θ de $\mathcal{V}(D)$ se factorise par $\mathcal{V}_2(D)$. L'action adjointe $\mathrm{ad}(\theta)$ de θ induit des endomorphismes tordus $\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1(D)$ et $\mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2(D)$. Les fibrés vectoriels \mathcal{V}_1 et $\mathcal{V}/\mathcal{V}_2$ sont de même rang égal à la dimension de \mathfrak{n} . Le morphisme évident

$$\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{V}_2$$

est injectif. Il s'ensuit qu'on a

$$\deg(\mathcal{V}_1) \leq \deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2)$$

avec égalité si et seulement si le morphisme est bijectif. Soit μ le caractère de $X^*(P) = X^*(M)$ donné par $\det(\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{n}})$. On a donc $\mu(\alpha^\vee) > 0$. Notons que μ est encore égal au caractère de M donné par $\det(\mathrm{Ad}|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{q}})$. Il s'ensuit qu'on a

$$\mu(\deg(m_P)) = \deg(\mathcal{V}_1) \leq \deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2) = \mu(\deg(m_Q))$$

et

$$\mu(\alpha^\vee)x_\alpha = \deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2) - \deg(\mathcal{V}_1) = \mathrm{long}(\mathcal{T})$$

où \mathcal{T} est le faisceau de torsion défini par

$$\mathcal{T} = \mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2).$$

On a donc la positivité dans l'inégalité (5.9). Il nous reste à majorer la longueur de \mathcal{T} . Pour cela, on utilise les isomorphismes

$$p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1 \simeq \mathcal{T} \simeq p_2(\mathcal{V})/\mathcal{V}_2$$

qui sont compatibles aux endomorphismes tordus induit par $\text{ad}(\theta)$. Soit χ_i le polynôme caractéristique de la restriction de $\text{ad}(\theta)$ à $\mathcal{V}_{i,\eta}$ et soit λ le résultant de ces deux polynômes. En fait, λ est même une section non nulle de $\mathcal{O}(ND)$ où

$$N = \dim(\mathfrak{n}) \dim(\mathfrak{q}).$$

L'endomorphisme tordu $p_1(\mathcal{V}) \rightarrow p_1(\mathcal{V})(ND)$ donné par la multiplication induit un endomorphisme tordu trivial de $p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1$. On a donc

$$\lambda p_1(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}_1(ND)$$

et la majoration

$$\text{long}(\mathcal{T}) \leq 2 \dim(\mathfrak{n}) N \deg(D)$$

ce qui montre la majoration de droite de l'inégalité (5.9) dans le cas où M est maximal.

Si M n'est pas maximal, on utilise les résultats précédents au groupe réductif M_R qui est l'unique élément de \mathcal{L} qui est un facteur de Levi de R . L'algèbre de Lie de R est $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ et celle de M_R est isomorphe à $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}/(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{n}_Q)$. □

5.8. Enveloppes convexes associés à un triplet de Hitchin. — On continue avec les notations du paragraphe précédent. Soit $m \in \mathcal{M}(K)$ et $M \in \mathcal{L}$ tel que $f(m) \in \mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K)$. Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, soit m_P une réduction de m à P .

$$\mathcal{CV}_m$$

l'enveloppe convexe fermée des points

$$-\deg(m_P)$$

pour $P \in \mathcal{P}(M)$.

La positivité dans le lemme 5.7 va nous permettre de donner une autre description du convexe $\overline{\mathcal{C}}_m$ (pour des résultats analogues dans des contextes similaires, cf. [1] §§2,3 et [7] §2).

Proposition 5.8. — *Pour tout $m \in \mathcal{M}(K)$, on a l'égalité suivante*

$$\overline{\mathcal{C}}_m = \mathcal{CV}_m + \mathfrak{a}_T^M + \mathfrak{a}_G.$$

Démonstration. — Il s'agit de prouver l'égalité entre deux ensembles qui sont clairement des parties convexes et fermées de \mathfrak{a}_T , invariantes par translation par $\mathfrak{a}_T^M + \mathfrak{a}_G$. Soit X_P la projection de $-\deg(m_P)$ sur \mathfrak{a}_M^G . Il suffit donc de prouver l'égalité suivantes entre parties de \mathfrak{a}_M^G

$$\bigcap_{P \in \mathcal{P}(M)} (X_P - \overline{+\mathfrak{a}_P} \cap \mathfrak{a}_M^G) = \text{cvx}(X_P)$$

où $\text{cvx}(X_P)$ est l'enveloppe convexe des X_P pour $P \in \mathcal{P}(M)$.

Prouvons l'inclusion \subset . Soit H un point de \mathfrak{a}_M^G qui n'appartienne pas à $\text{cvx}(X_P)$. Alors, il existe $\lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*$ tel que

$$\lambda(H) > \sup_{P \in \mathcal{P}(M)} \lambda(X_P).$$

Soit $P \in \mathcal{P}(M)$ tel que λ appartienne au cône positivement engendré par $\hat{\Delta}_P$. L'inégalité $\lambda(H) > \lambda(X_P)$ entraîne qu'il existe $\varpi \in \hat{\Delta}_P$ tel que

$$\varpi(H) > \varpi(X_P).$$

Par conséquent, H n'appartient pas à $X_P - \overline{+\mathfrak{a}_P^G}$.

Réciproquement, prouvons l'inclusion \supset . Il s'agit de voir que pour tous sous-groupes paraboliques P et Q dans $\mathcal{P}(M)$ le vecteur $X_P - X_Q$ appartient au cône $\overline{+\mathfrak{a}_P} \cap \mathfrak{a}_M^G$. Si P et Q sont adjacents, cela résulte du lemme 5.7. Plus généralement, en prenant une suite de longueur minimale $P_i \in \mathcal{P}(M)$ pour $i = 0, \dots, n$ telle que P_{i+1} et P_i sont adjacents, $P_0 = P$ et $P_n = Q$, on voit que l'on peut écrire $X_P - X_Q$ comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de racines de A_M dans N_P ce qui donne le résultat voulu. \square

6 La ξ -stabilité

6.1. Champs de Hitchin ξ -stable. — Soit $\xi \in \mathfrak{a}_T$.

Définition 6.1. — Soit S un k -schéma affine et $m \in \mathcal{M}(S)$. On dit que m est ξ -stable, resp. ξ -semi-stable, si pour tout $s \in S$ on a

$$\xi \in \mathcal{C}_{m_s},$$

resp.

$$\xi \in \overline{\mathcal{C}}_{m_s}.$$

Remarques. — Comme \mathcal{C}_{m_s} est invariant par translation par \mathfrak{a}_G , la ξ -(semi-)stabilité ne dépend que de la projection sur \mathfrak{a}_T^G de ξ .

Dans le cas $G = GL(n)$, cette définition de ξ -stabilité est réminiscente d'une définition de stabilité avec poids due à Esteves [15] dans le cadre des jacobiniennes compactifiées. Lorsque $\xi = 0$, on retrouve la notion usuelle de stabilité pour les fibrés de Hitchin. On notera également que cette définition est très proche de celle utilisée pour les fibrés (ordinaire ou de Hitchin) avec structure parabolique étudiée par Boden et Yokogawa dans [9] et Heinloth et Schmitt dans [22]. Elle s'inspire également des troncatures et du poids qu'Arthur introduit dans le contexte de la formule des traces. Notre présentation (en particulier l'utilisation du convexe \mathcal{C}_m) s'inspire aussi du travail de Behrend sur la stabilité des schémas en groupes réductifs dans [7].

Définition 6.2. — Soit \mathcal{M}^ξ , resp. $\overline{\mathcal{M}^\xi}$ le sous-champ de \mathcal{M} tel que pour tout k -schéma affine S la catégorie $\mathcal{M}^\xi(S)$, resp. $\overline{\mathcal{M}^\xi}$, soit la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(S)$ dont les objets sont les points ξ -stables, resp. ξ -semi-stables.

Définition 6.3. — On dit que $\xi \in \mathfrak{a}_T$ est *en position générale* si pour tout $P \in \mathcal{F}$ tel que $P \subsetneq G$ la projection de ξ sur \mathfrak{a}_P suivant $\mathfrak{a}_T = \mathfrak{a}_T^P \oplus \mathfrak{a}_P$ n'appartient pas au réseau $X_*(P)$.

Remarque. — Il résulte de la définition 6.2 qu'on a $\mathcal{M}^\xi \subset \overline{\mathcal{M}^\xi}$. Si ξ est en position générale, quels que soient l'extension K de k et le triplet de Hitchin $m \in \mathcal{M}(K)$, le point ξ ne peut pas appartenir au bord de $\overline{\mathcal{C}}_{m_s}$. Il s'ensuit que pour tout ξ en position générale, on a

$$\mathcal{M}^\xi = \overline{\mathcal{M}^\xi}.$$

Proposition 6.4. — Les champs \mathcal{M}^ξ et $\overline{\mathcal{M}^\xi}$ sont des sous-champs ouverts de \mathcal{M} .

Démonstration. — Il suffit de vérifier que pour tout k -schéma affine S et tout $m \in \mathcal{M}(S)$ l'ensemble des $s \in S$ tel que m_s appartienne à \mathcal{M}^ξ , resp. $\overline{\mathcal{M}^\xi}$, est ouvert. Comme \mathcal{M} est localement de type fini, on peut se limiter à des S noethériens auquel cas le résultat est donné par la semi-continuité de la fonction \mathcal{C}_m , resp. $\overline{\mathcal{C}}_m$ (cf. proposition 5.6). \square

Proposition 6.5. — *Si G est semi-simple, les champs \mathcal{M}^ξ et $\overline{\mathcal{M}^\xi}$ sont des champs de type fini sur k .*

Démonstration. — Soit $B \subset G$ un sous-groupe de Borel contenant T . Soit \mathcal{T}_G le champ des G -torseurs sur C et pour tout cocaractère $\delta \in X_*(T)$ soit \mathcal{T}_B^δ le champ des B -torseurs de degré δ sur C . On sait bien que ce dernier est un champ de type fini sur k . On a un morphisme $\mathcal{T}_B^\delta \rightarrow \mathcal{T}$ qui à un B -torseur \mathcal{E} associe le G -torseur $\mathcal{E} \times^G B$. Par ailleurs, le morphisme $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$ qui, à un triplet (\mathcal{E}, θ, t) associe le G -torseur \mathcal{E} est de type fini. Il suffit donc de prouver que l'image de \mathcal{M}^ξ ou $\overline{\mathcal{M}^\xi}$ par ce morphisme est de type fini. Or cette image est recouverte, d'après le lemme suivant, par les images de \mathcal{T}_B^δ pour δ parcourant un ensemble fini. Elle est donc bien de type fini. \square

Lemme 6.6. — *Soit $B \subset G$ un sous-groupe de Borel contenant T . Il existe un ensemble fini $\mathcal{X} \subset X_*(T)$ tel que pour tout triplet $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \overline{\mathcal{M}^\xi}(k)$ il existe une réduction \mathcal{E}_B de \mathcal{E} à B telle que*

$$\deg(\mathcal{E}_B) \in \mathcal{X}.$$

Démonstration. — D'après Harder ([19] Satz 2.1.1 et [20] p.253), il existe une constante $c > 0$ telle que tout G -torseur \mathcal{E} sur C admette une réduction \mathcal{E}_B à B dont le degré $\deg(\mathcal{E}_B)$ appartient au cône aigu

$$\mathfrak{c} = \{H \in \mathfrak{a}_T \mid \alpha(H) \geq -c \forall \alpha \in \Delta_B\}$$

où Δ_B est l'ensemble des racines simples de T dans B . Soit N un entier qui majore, pour toute racine de T dans B , la somme de ses coefficients dans la base Δ_B . Soit d un entier qui vérifie

$$(6.1) \quad d > \deg(D) + 2Nc.$$

Soit P un sous-groupe parabolique de G qui contient B et $\Delta_P \subset \Delta_B$ le sous-ensemble des racines simples dans N_P . Soit \mathfrak{c}_P le cône dans \mathfrak{a}_T défini par

$$\mathfrak{c}_P = \{H \in \mathfrak{a}_T \mid \alpha(H) \geq d \forall \alpha \in \Delta_P \text{ et } \alpha(H) \leq d \forall \alpha \in \Delta_B - \Delta_P\}.$$

Lorsque P parcourt l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard, les cônes \mathfrak{c}_P recouvrent \mathfrak{a}_T . Il suffit donc de prouver le résultat suivant : il existe un ensemble fini $\mathcal{X}_P \subset X_*(T)$ tel que pour tout triplet $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \overline{\mathcal{M}^\xi}(k)$ et toute réduction \mathcal{E}_B de \mathcal{E} à B dont le degré vérifie

$$\deg(\mathcal{E}_B) \in \mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_P$$

on a $\deg(\mathcal{E}_B) \in \mathcal{X}_P$.

Lemme 6.7. — *Soit $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \overline{\mathcal{M}^\xi}(k)$ et \mathcal{E}_B une réduction de \mathcal{E} à B dont le degré vérifie*

$$\deg(\mathcal{E}_B) \in \mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_P.$$

Alors θ se factorise par $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_D \hookrightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E})$.

Démonstration. — L'action adjointe de θ induit un morphisme de schémas en algèbres de Lie

$$\mathcal{E} \times^{G, \text{Ad}} \mathfrak{g} \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times^{G, \text{Ad}} \mathfrak{g}_D.$$

Il suffit de prouver que ce morphisme envoie $\mathcal{E}_B \times^B \mathfrak{b}$ dans $\mathcal{E}_B \times^B \mathfrak{p}_D$. Considérons alors une filtration de \mathfrak{g}

$$(0) = \mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{b}_r = \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_s \subset \mathfrak{p}_{s-1} \subset \dots \subset \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}$$

par des sous-espaces B -stables de sorte que les quotients $\mathfrak{b}_{i+1}/\mathfrak{b}_i$ et $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i+1}$ soient de dimension 1.

Montrons que pour tout $0 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$ l'action adjointe de θ envoie $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{b}_i$ dans $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_{j,D}$. Le cas $i = r$ et $j = s$ donne le résultat cherché. On raisonne pour cela par récurrence. Le cas $i = 0$, trivial, amorce la récurrence. Pour un couple (i, j) , l'hypothèse de récurrence est que le résultat vaut pour tout couple (i', j') avec soit $i' < i$ et $j' \leq s$ soit $i' = i$ et $j' \leq j$. Supposons tout d'abord $j < s$. Prouvons l'assertion pour le couple $(i, j+1)$. Par hypothèse de récurrence, on sait que θ envoie $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{b}_{i-1}$ dans $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_D$ et $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{b}_i$ dans $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_{j,D}$. En particulier, θ induit un morphisme de fibrés en droites

$$(6.2) \quad \mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{b}_i / \mathfrak{b}_{i-1} \rightarrow \mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_{j,D} / \mathfrak{p}_{j+1,D}.$$

Si ce morphisme n'est pas nul, le degré du but doit être supérieur au degré de la source. Il existe des caractères disons $\alpha \in \phi_T^B \cup \{0\}$ et $\beta \in \Phi_T^{N_P}$ de sorte que T agisse sur les quotients $\mathfrak{b}_i/\mathfrak{b}_{i-1}$ et $\mathfrak{p}_j/\mathfrak{p}_{j+1}$ respectivement par α et $-\beta$. Il s'ensuit que le degré du but est $-\beta(\deg(\mathcal{E}_B)) + \deg(D)$ et celui de la source est $\alpha(\deg(\mathcal{E}_B))$. On doit donc avoir l'inégalité

$$(\alpha + \beta)(\deg(\mathcal{E}_B)) \leq \deg(D)$$

Or β est une racine de T dans N_P donc elle a une composante non nulle au moins sur un élément de Δ_P . Comme $\deg(\mathcal{E}_B) \in \mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_P$, on a la minoration

$$\beta(\deg(\mathcal{E}_B)) \geq d - Nc.$$

En minorant trivialement $\alpha(\deg(\mathcal{E}_B))$ par $-Nc$, on voit qu'on contredit l'inégalité (6.1) ci-dessus. En conclusion, le morphisme (6.2) est nul d'où l'assertion pour le couple $(i, j+1)$. Lorsque $j = s$, on doit prouver que l'assertion vaut pour le couple $(i+1, 1)$ ce qui se démontre de manière analogue. \square

Soit le P -torseur $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_B \times^B P$. D'après le lemme précédent, θ se factorise par $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_P)$. *A priori*, on sait que $\chi_G(t)$ est égal à la valeur de $\chi_G(\theta)$ au point ∞ mais il n'y a pas de raison pour que $\chi_P(t)$ soit égal à la valeur de $\chi_P(\theta)$ au point ∞ . Cependant, il existe un élément w du groupe de Weyl W tel que $\chi_P(w \cdot t)$ soit égal à la valeur de $\chi_P(\theta)$ au point ∞ . Il s'ensuit que le triplet $(\mathcal{E}_P, \theta, w \cdot t)$ est une réduction de $(\mathcal{E}, \theta, w \cdot t)$ à P . Il est clair sur les définitions que $(\mathcal{E}, \theta, w \cdot t)$ appartient à $\overline{\mathcal{M}^{w \cdot \xi}}$. Quitte à changer ξ en $w \cdot \xi$, on suppose dans la suite qu'on a $w = 1$.

Si $P = G$, le convexe $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_G$ est compact et $\deg(\mathcal{E}_B)$ appartient à l'ensemble fini $X_*(T) \cap \mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_G$. Si $P \neq G$, on a par ξ -semi-stabilité de (\mathcal{E}, θ, t) la condition

$$\xi \in -\deg(\mathcal{E}_P) - {}^+ \mathfrak{a}_P + \mathfrak{a}_T^P.$$

Ainsi $\deg(\mathcal{E}_B)$ appartient au convexe compact

$$\mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_P \cap (-\xi - {}^+ \mathfrak{a}_P + \mathfrak{a}_T^P)$$

donc de nouveau à un ensemble fini. \square

6.2. Le théorème principal. — Introduisons la définition suivante.

Définition 6.8. — Soit f^ξ , resp. $\overline{f^\xi}$, la restriction du morphisme f de Hitchin à \mathcal{M}^ξ , resp. $\overline{\mathcal{M}^\xi}$.

Nous pouvons énoncer alors notre principal résultat.

Théorème 6.9. — Soit $\xi \in \mathfrak{a}_T$ en position générale. On suppose que G est semi-simple. Le champ \mathcal{M}^ξ est un champ de Deligne-Mumford, lisse et de type fini sur k . De plus, le morphisme de Hitchin f^ξ est propre.

Démonstration. — D'après la proposition 6.4, \mathcal{M}^ξ est un sous-champ ouvert de \mathcal{M} . Or ce dernier est lisse sur k (Biswas et Ramanan l'ont démontré par un calcul de déformation dans

[8] qui a été repris par Ngô cf. [25] proposition 5.3 et [24]) d'où la lissité de \mathcal{M}^ξ . On a vu dans la proposition 6.5 que le champ \mathcal{M}^ξ est de type fini. On montrera ultérieurement que \mathcal{M}^ξ est un champ de Deligne-Mumford (cf. la démonstration du théorème 10.1). La propriété de f^ξ est satisfaite par le critère valuatif qui combine les résultats des théorèmes 8.1 et 9.1 qui seront énoncés dans la suite. \square

6.3. Les ξ -points de Harder-Narasimhan. — On munit l'espace \mathfrak{a}_T d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant par le groupe de Weyl $W^G(T)$ qui fait de \mathfrak{a}_T un espace euclidien. Alors \mathfrak{a}_T est canoniquement isomorphe à son dual \mathfrak{a}_T^* . Dans cet isomorphisme, une racine et sa coracine sont égales à un coefficient strictement positif près. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathfrak{a}_T associée à ce produit scalaire. Notons que les espaces \mathfrak{a}_M et \mathfrak{a}_T^M sont alors orthogonaux (pour $M \in \mathcal{L}$).

Soit K une extension de k et $\xi \in \mathfrak{a}_T$.

Définition 6.10. — Soit $m \in \mathcal{M}(K)$. Le ξ -point de Harder-Narasimhan de m est l'unique point $\varrho_m \in \overline{\mathcal{C}}_m$ qui vérifie

$$\|\varrho_m - \xi\| = \min_{X \in \overline{\mathcal{C}}_m} \|X - \xi\|.$$

Remarque. — Comme $\overline{\mathcal{C}}_m$ est un convexe fermé non vide (ce qui résulte de la proposition 5.8), il existe un et un seul ξ -point de Harder-Narasimhan. Pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}$, soit \mathfrak{a}_P^+ le cône *aigu*, ouvert dans \mathfrak{a}_P , défini par

$$(6.3) \quad \mathfrak{a}_P^+ = \{H \in \mathfrak{a}_P \mid \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_P\}.$$

On obtient ainsi une partition de \mathfrak{a}_T

$$(6.4) \quad \mathfrak{a}_T = \bigcup_{P \in \mathcal{F}} \mathfrak{a}_P^+.$$

La proposition suivante et sa démonstration sont essentiellement une reformulation de [7] proposition 3.13.

Proposition 6.11. — Soit $m \in \mathcal{M}(K)$ et $M \in \mathcal{L}$ tel que $f(m) \in \mathcal{A}_{M, \text{ell}}$. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M)$ soit m_P une réduction de m à P . Soit $\varrho \in \overline{\mathcal{C}}_m$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. le point ϱ est le ξ -point de Harder-Narasimhan de m ;
2. il existe un sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}(M)$ tel qu'on ait
 - (a) $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_Q^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$;
 - (b) la projection de ϱ sur \mathfrak{a}_M^G appartient à la projection sur \mathfrak{a}_M^G de l'enveloppe convexe des points

$$-\deg(m_P)$$

pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ inclus dans Q ;

3. il existe un sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}(M)$ tel qu'on ait
 - (a) $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_Q^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$;
 - (b) ϱ appartient au sous-espace affine

$$-\deg(m_Q) + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G.$$

Démonstration. — Montrons que la première assertion implique la deuxième. Supposons que ϱ soit le ξ -point de Harder-Narasimhan de m . Soit Q l'unique élément de \mathcal{F} tel que $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_Q^+$, cf. la partition (6.4). Comme $\overline{\mathcal{C}}_m$ est stable par translation par $\mathfrak{a}_T^M + \mathfrak{a}_G$, on a

$$(6.5) \quad \xi - \varrho \in \mathfrak{a}_M^G.$$

Par conséquent Q doit contenir M . On a donc vérifié 2.(a). Vérifions 2.(b). Soit $P_0 \in \mathcal{P}(M)$ tel que $P_0 \subset Q$. D'après la proposition 5.8, le point $-\deg(m_{P_0})$ appartient à $\overline{\mathcal{C}}_m$. Par convexité de $\overline{\mathcal{C}}_m$, pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$, le point $(1 - \lambda)\varrho - \lambda \deg(m_{P_0})$ appartient aussi à $\overline{\mathcal{C}}_m$ et le réel

$$\|(1 - \lambda)\varrho - \lambda \deg(m_{P_0}) - \xi\|^2$$

atteint son minimum en $\lambda = 0$. En dérivant en $\lambda = 0$, on tombe sur la condition

$$(6.6) \quad \langle \varrho + \deg(m_{P_0}), \xi - \varrho \rangle \geq 0.$$

Comme $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_Q^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$, on peut écrire

$$(6.7) \quad \xi - \varrho = \sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_Q} y_{\varpi} \varpi$$

avec $y_{\varpi} > 0$. La condition (6.6) ci-dessus implique

$$(6.8) \quad \sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_Q} y_{\varpi} \varpi(\varrho + \deg(m_{P_0})) \geq 0.$$

Pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$, on a

$$\varpi(\varrho + \deg(m_{P_0})) = \varpi(\varrho + \deg(m_Q))$$

et cette quantité est négative puisque $\varrho \in \overline{\mathcal{C}}_m$. L'inégalité (6.8) n'est donc possible que si pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$ on a

$$(6.9) \quad \varpi(\varrho + \deg(m_{P_0})) = 0.$$

Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, soit $\lambda_P \in \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions suivantes

- $0 \leq \lambda_P \leq 1$;
- $\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \lambda_P = 1$;
- le projeté de ϱ sur \mathfrak{a}_M^G est égal au projeté sur \mathfrak{a}_M^G du point

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} -\lambda_P \deg(m_P).$$

De tels réels λ_P existent par la proposition 5.8. Il s'agit de voir qu'on peut choisir λ_P de sorte que $\lambda_P = 0$ si $P \not\subset Q$. Par (6.9), on obtient

$$(6.10) \quad \varpi(\deg(m_{P_0})) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \lambda_P \varpi(\deg(m_P))$$

pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$. Le lemme 5.7 implique que pour $P \in \mathcal{P}(M)$ la différence $\deg(m_P) - \deg(m_Q)$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de Δ_P^{\vee} . Par ailleurs, ϖ ne prend que des valeurs positives sur Δ_P^{\vee} et elle est nulle sur $\Delta_P^{\vee} - \Delta_Q^{\vee}$. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$ adjacent à P_0 . De choses l'une soit $\deg(m_P) = \deg(m_{P_0})$ et dans ce cas on peut bien supposer que $\lambda_P = 0$, soit

$$\deg(m_P) - \deg(m_{P_0}) = x_{\alpha} \alpha^{\vee}$$

avec $x_{\alpha} > 0$ et $\{\alpha^{\vee}\} = \Delta_{P_0}^{\vee} \cap (-\Delta_P^{\vee})$ (par le lemme 5.7). L'égalité (6.10) n'est donc possible que si pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$ on a $\alpha^{\vee} \notin \Delta_Q^{\vee}$. Mais dans ce cas on a $P \subset Q$. En raisonnant par récurrence sur le cardinal de $\Delta_{P_0}^{\vee} \cap (-\Delta_P^{\vee})$, on voit que pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, on a soit $P \subset Q$ soit on peut supposer que $\lambda_P = 0$. Cela prouve ainsi la deuxième assertion.

La deuxième assertion implique la troisième puisque pour $P \subset Q$ la projection de $\deg(m_P)$ sur \mathfrak{a}_Q est égal à $\deg(m_Q)$.

Finalement montrons que la troisième assertion implique la première. Soit $Q \in \mathcal{F}(M)$ tel que les conditions 3.(a) et 2.(b) soient satisfaites. Montrons que l'assertion 1 est alors vérifiée. Soit $X \in \bar{\mathcal{C}}_m$. Il s'agit de voir que $\|X - \xi\| \geq \|\varrho - \xi\|$. On a

$$\begin{aligned}
 (6.11) \quad \|X - \xi\|^2 &= \|\varrho - \xi\|^2 + 2\langle \xi - \varrho, \varrho - X \rangle + \|X - \varrho\|^2 \\
 &\geq \|\varrho - \xi\|^2 + 2\langle \xi - \varrho, \varrho - X \rangle \\
 &\geq \|\varrho - \xi\|^2 + \sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_Q} 2y_{\varpi} \varpi(\varrho - X).
 \end{aligned}$$

où les y_{ϖ} , définis en (6.7), sont positifs. Par hypothèse, on a $\varrho \in -\deg(m_Q) + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G$ et Comme X appartient à $\bar{\mathcal{C}}_m$, on a, en particulier,

$$X \in -\deg(m_Q) - \overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G.$$

Combiné à 3.(b), cela donne On a donc aussi

$$\varrho - X \in \overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G.$$

Donc pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$, on a $\varpi(\varrho - X) \geq 0$ et (6.11) donne $\|X - \xi\| \geq \|\varrho - \xi\|$ comme voulu. \square

La proposition précédente implique immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 6.12. — *Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 6.11. Soit $\varrho \in \bar{\mathcal{C}}_m$ le ξ -point de Harder-Narasimhan de m . Il existe une unique $Q \in \mathcal{F}(M)$ tel que ϱ réalise la distance de ξ au sous-espace affine $-\deg(m_Q) + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G$.*

7 Description adélique des fibres de Hitchin

7.1. Soit V un ensemble fini de points fermés de C qui contient le point ∞ et le support du diviseur D . Le diviseur effectif D s'écrit alors comme la somme formelle

$$D = \sum_{v \in V} d_v v$$

où, pour tout $v \in V$, l'entier d_v est positif, nul hors du support de D donc nul en ∞ . Soit C^V l'ouvert de C complémentaire de V . Soit $k[C^V]$ l'algèbre des fonctions régulières sur C^V .

7.2. Pour toute k -algèbre A , soit $C_A = C \times_k \text{Spec}(A)$ et $C_A^V = C^V \times_k \text{Spec}(A)$. Soit $A[C^V] = k[C^V] \otimes_k A$. Pour tout $v \in V$, le complété de l'algèbre quasi-cohérente \mathcal{O}_{C_A} le long du diviseur $v \times_{\kappa} A$ s'identifie à l'anneau $A[[z_v]]$ via le choix d'une uniformisante z_v . Soit $A((z_v))$ l'anneau des séries formelles de Laurent en la variable z_v à coefficients dans A : c'est le localisé de $A[[z_v]]$ que l'on obtient en inversant z_v . On a le diagramme commutatif suivant où les morphismes sont les morphismes évidents

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(A((z_v))) & \xrightarrow{j_{A,v}} & \text{Spec}(A[[z_v]]) \\
 \downarrow i'_{A,v} & & \downarrow i_{A,v} \\
 C_A^V & \xrightarrow{j_A} & C_A
 \end{array}$$

Pour tout k -schéma S , on note $S((z_v))$, resp. $S[[z_v]]$ le foncteur qui, à toute k -algèbre A , associe l'ensemble des points $S(A((z_v)))$, resp. $S(A[[z_v]])$.

7.3. Descente formelle à la Beauville-Laszlo et uniformisation. — Avec les notations des paragraphes précédents, on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 7.1. — *Soit un triplet $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. X est un élément de $\mathfrak{g}(A[C^V])$;
2. pour tout $v \in V$, l'élément g_v appartient à $G((z_v))(A)$ et vérifie

$$\mathrm{Ad}(g_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](A) ;$$

en particulier $\chi(X) \in \mathfrak{car}[[z_\infty]](A)$;

3. t est un élément de $\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}(A)$ dont la caractéristique $\chi(t)$ est égale à la réduction modulo z_∞ de $\chi(X)$.

Il existe un triplet $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(\mathrm{Spec}(A))$ ainsi que des isomorphismes G -équivariants

$$\alpha_{A,v} : i_{A,v}^* \mathcal{E} \rightarrow G \times_k A[[z_v]]$$

et

$$\beta_A : j_A^* \mathcal{E} \rightarrow G \times_k A[C^V]$$

tels que

- l'automorphisme G -équivariant de $G \times_k A((z_v))$ défini par $(i_{A,v}^*)(\beta_A) \circ (j_{A,v}^*)(\alpha_{A,v}^{-1})$ est donné par la translation à gauche par $g_v \in G((z_v))(A)$;
- β_A induit un isomorphisme entre $\mathrm{Ad}(j_A^* \mathcal{E})$ et $\mathfrak{g} \times_k A[C^V]$ qui envoie $j_A^* \theta$ sur X .

En outre, le triplet $(m, (\alpha_{A,v})_{v \in V}, \beta_A)$ est uniquement déterminé à un unique isomorphisme près. Tout tel triplet s'obtient à partir d'un unique triplet $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ comme ci-dessus.

Démonstration. — C'est une conséquence du résultat de descente formelle de Beauville-Laszlo (cf. [5]). \square

Introduisons alors la catégorie $\mathrm{Cat}_V(A)$ dont les objets sont les triplets $(X, (g_v G[[z_v]](A))_{v \in V}, t)$ qui vérifient les conditions 1 à 3 de la proposition 7.1 (la condition 2 sur g_v est clairement stable par translation par $G[[z_v]](A)$) et l'ensemble des morphismes entre deux objets $(X, (g_v G[[z_v]](A))_{v \in V}, t)$ et $(X', (g'_v G[[z_v]](A))_{v \in V}, t')$ est

- vide si $t \neq t'$;
- l'ensemble des $\delta \in G(A[C^V])$ tels que $\mathrm{Ad}(g)X = X'$ et pour tout $v \in V$

$$\delta g_v G[[z_v]](A) = g'_v G[[z_v]](A).$$

Corollaire 7.2. — La construction de la proposition 7.1 induit une équivalence de catégories entre

- la catégorie $\mathrm{Cat}_V(A)$;
- la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(\mathrm{Spec}(A))$ formée des triplets $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(\mathrm{Spec}(A))$ pour lesquels le G -torseur \mathcal{E} est trivial sur C_A^V et sur $\mathrm{Spec}(A[[z_v]])$ pour tout $v \in V$.

7.4. Soit K une extension de k . Soit $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$. Soit $t_a \in \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}[[z_\infty]](K)$ le relèvement de t tel que a et $\chi(t_a)$ coïncident sur $\mathrm{Spec}(K[[z_\infty]])$ (cf. proposition 3.8). Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \mathrm{ell}}(K))$ (cf. proposition 3.4). Soit $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(K)$ tel que $f(m) = (a, t)$. Soit α_{K_v} et β_K des trivialisations de \mathcal{E} respectivement sur $\mathrm{Spec}(K[[z_v]])$ et C_K^V . On suppose que ces trivialisations vérifient les conditions de la proposition 7.1. Soit $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.1. On suppose de plus X est un élément de $\mathfrak{m}(K[C^V])$ tel que X et t_a sont conjugués sous $M((z_\infty))(K)$.

Proposition 7.3. — Soit $P \in \mathcal{F}(M)$. Pour tout $v \in V$, soit $p_v \in P((z_v))(K)$ tel que

$$g_v \in p_v G[[z_v]](K).$$

Alors il existe un triplet $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$ qui est une réduction de m à P et des trivialisations $\alpha_{K,v}^P$ et β_K^P de \mathcal{E}_P respectivement sur $\mathrm{Spec}(K[[z_v]])$ et C_K^V telles que

- l'automorphisme P -équivariant de $G \times_k K((z_v))$ défini par $(i_{K,v}^*)(\beta_K^P) \circ (j_{K,v}^*)(\alpha_{K,v}^P)^{-1}$ est donné par la translation à gauche par $p_v \in P((z_v))(K)$;
- β_K^P induit un isomorphisme entre $\mathrm{Ad}(j_K^* \mathcal{E}_P)$ et $\mathfrak{p} \times_k K[C^V]$ qui envoie $j_K^* \theta_P$ sur X .

Démonstration. — De la relation $\text{Ad}(g_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](K)$ et du fait que $X \in \mathfrak{m}(K[C^V])$, il vient

$$\text{Ad}(p_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{p}[[z_v]](K).$$

En particulier, $\chi_P(X) \in \mathfrak{car}_M[[z_\infty]](K)$. Comme on a supposé que X et t_a sont conjugués sous $M(F_\infty)$, on a $\chi_P(X) = \chi_P(t_a)$. Ainsi $(X, (p_v)_{v \in V}, t)$ est un triplet qui satisfait les conditions 1 à 3 de la proposition 7.1 relatives à P . La proposition 7.1 appliquée au groupe P donne un triplet $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$. On vérifie que c'est bien une réduction à P de m . \square

7.5. Fonctions H_P . — On continue avec les notations du paragraphe précédent.

Définition 7.4. — Soit $P \in \mathcal{F}(T)$ et $v \in V$ et

$$H_P : G((z_v))(K) \rightarrow \mathfrak{a}_P$$

l'application qui vérifie pour tout $\mu \in X^*(P)$ et $g \in G((z_v))(K)$,

$$\mu(H_P(g)) = -\text{val}_v(\mu(p))$$

où val_v est la valuation usuelle sur $K((z_v))$ et p est un élément de $P((z_v))(K)$, uniquement défini à translation à gauche près par un élément de $P[[z_v]](K)$, qui vérifie

$$g \in pG(K[[z_v]]).$$

L'existence d'un tel élément p est donnée par la décomposition d'Iwasawa.

Plus généralement, pour une famille $(g_v)_{v \in V}$ d'éléments de $G((z_v))(K)$ on pose

$$H_P((g_v)_{v \in V}) = \sum_{v \in V} H_P(g_v).$$

Cette définition garde un sens lorsque V est infini pourvu que g_v appartienne à $G[[z_v]]$ pour tout v en dehors d'un ensemble fini. En particulier, la fonction H_P est bien définie sur les points de G à valeurs dans les adèles de F .

Indiquons alors un corollaire à la proposition 7.3.

Corollaire 7.5. — Avec les hypothèses et les notations du §7.4 et de la proposition 7.3, on a l'égalité suivante pour tout $P \in \mathcal{F}(M)$ et toute réduction m_P de m à P

$$\deg(m_P) = H_P((g_v)_{v \in V}).$$

Démonstration. — Soit $P \in \mathcal{F}(M)$. La proposition 7.3 montre qu'il existe une réduction $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$ de m à P tel que le P -torseur \mathcal{E}_P est défini par des données de recollement $p_v \in P((z_v))(K)$ où pour tout $v \in V$ on a $g_v \in p_v G[[z_v]]$. Donc pour tout caractère $\mu \in X^*(P)$, la famille $(\mu(p_v))_{v \in V}$ est une donnée de recollement pour le fibré en droites $\mu(\mathcal{E}_P)$. On vérifie l'égalité

$$\deg(\mu(\mathcal{E}_P)) = \sum_{v \in V} \text{val}_v(\mu(p_v)) = \mu(H_P((g_v)_{v \in V})),$$

d'où le résultat. \square

7.6. Description adélique des fibres de Hitchin. —

On poursuit avec les notations des paragraphes précédents hormis V qui désigne maintenant l'ensemble de tous les points fermés de C . Soit F le corps des fonctions de la courbe C . Soit $\xi \in \mathfrak{a}_T$ et $(a, t) \in \mathcal{A}(k)$.

Définition 7.6. — Soit $\mathcal{X}_{(a,t)}$ l'ensemble des couples $(X, (g_v)_{v \in V})$ qui vérifient

1. X est un élément semi-simple G -régulier de $\mathfrak{g}(F)$ dont la caractéristique $\chi(X)$ est égale à la restriction de a au point générique de C ;
2. pour tout $v \in V$, l'élément g_v appartient à $G((z_v))(k)/G[[z_v]](k)$ et vérifie les trois conditions suivantes
 - (a) pour tout $v \in V$ en dehors d'un ensemble fini g_v est la classe triviale ;
 - (b) $\text{Ad}(g_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](k)$;
 - (c) la caractéristique $\chi(t)$ est égale à la réduction modulo z_∞ de $\chi(X)$;

Remarque. — La condition 2.(b) implique que la restriction de $\chi(X)$ à $\text{Spec}(k((z_\infty)))$ appartient à $\text{car}[[z_\infty]](k)$. Donc 2.(c) fait sens.

Soit $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}[[z_\infty]](k)$ l'unique relèvement de t tel que $\chi(t_a)$ soit égal à la restriction de a à $\text{Spec}(k[[z_\infty]])$ (cf. proposition 3.8). Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(k))$ (cf. proposition 3.4).

Définition 7.7. — Soit $\mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$ l'ensemble des couples $(X, (g_v)_{v \in V})$ dans $\mathcal{X}_{(a,t)}$ qui vérifient

1. (bis) X est un élément semi-simple elliptique G -régulier de $\mathfrak{m}(F)$ qui est conjugué par un élément de $M((z_\infty))(k)$ à t_a ;
2. (d) la projection de ξ sur \mathfrak{a}_M^G appartient à la projection sur \mathfrak{a}_M^G de l'enveloppe convexe des points

$$-H_P((g_v)_{v \in V}) = -\sum_{v \in V} H_P(g_v).$$

Pour tout $\delta \in G(F)$ et tout couple $(X, (g_v)_{v \in V})$ dans $\mathcal{X}_{(a,t)}$ le couple $(\text{Ad}(\delta)X, (\delta g_v)_{v \in V})$ appartient aussi à $\mathcal{X}_{(a,t)}$. On en déduit une action à gauche de $G(F)$ sur $\mathcal{X}_{(a,t)}$. L'action de $M(F)$ qui s'en déduit préserve $\mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$. Les conditions 1. (bis) et 2. (d) ci-dessus sont préservées par l'action de $M(F)$: c'est trivial pour la première condition et la seconde résulte de l'égalité

$$H_P((mg_v)_{v \in V}) = H_P((g_v)_{v \in V})$$

pour tout $m \in M(F)$. (Plus précisément, on a, pour tout $\mu \in X^*(P)$ et tout $m \in M(F)$,

$$\mu(H_P((mg_v)_{v \in V})) = \mu(H_P((g_v)_{v \in V})) - \sum_{v \in V} \text{val}_v(\mu(m))$$

et la somme sur V est nulle par la formule du produit.)

Lorsqu'un groupe G abstrait agit à gauche sur un ensemble \mathcal{X} , on note

$$(7.2) \quad [G \backslash \mathcal{X}]$$

le groupoïde quotient dont l'ensemble des objets est \mathcal{X} et, pour tous objets x et x' dans \mathcal{X}' , l'ensemble des morphismes de x vers x' est l'ensemble des $g \in G$ tels que $g \cdot x = x'$.

Proposition 7.8. — La construction de la proposition 7.1 induit une équivalence de catégories entre le groupoïde quotient $[M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^\xi]$ et la fibre $\overline{f^\xi}^{-1}(a, t)$.

Démonstration. — Soit $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \overline{\mathcal{M}^\xi}(k)$ tel que $f(m) = (a, t)$. Comme le corps k est algébriquement clos, le G -torseur \mathcal{E} admet une trivialisatation générique (cf. lemme 4.1). On en fixe une et on en déduit une trivialisatation générique de $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$, donc un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ image de θ par cette trivialisatation. Soit Y un élément semi-simple, G -régulier et elliptique dans $\mathfrak{m}(F)$ tel que

- $\chi_G(Y)$ est égal à a_η la restriction de a au point générique η de C ;
- Y est conjugué à t_a par un élément de $M((z_\infty))(k)$.

Un tel Y existe (cf. corollaire 3.9). Il résulte du lemme 3.6 que X et Y sont conjugués sous $G(F)$. Quitte à changer la trivialisation de \mathcal{E} , on peut et on va supposer qu'on a $X = Y$.

Un choix de trivialisations de \mathcal{E} sur les voisinages formels $\mathrm{Spec}(k[[z_v]])$ donnent des éléments g_v de $G((z_v))$ par la construction de la proposition 7.1. La classe de g_v modulo $G[[z_v]]$ ne dépend pas de ce choix. On obtient ainsi un couple $(X, (g_v)_{v \in V})$ dans $\mathcal{X}_{(a,t)}$ qui vérifie en outre la condition 1.(bis) de la définition 7.6. En utilisant la proposition 7.3 et le fait que la trivialisation générique considérée s'étend à un ouvert de C , on voit qu'on a

$$\deg(m_P) = \sum_{v \in V} H_P(g_v)$$

pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$. Par la proposition 5.8, la condition de ξ -semi-stabilité se traduit par la condition 2.(d) de la définition 7.6. Ainsi $(X, (g_v)_{v \in V})$ appartient à $\mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que cette construction donne bien une équivalence de catégories comme annoncé. \square

8 Critère valuatif : existence

8.1. Soit ξ un élément *quelconque* de \mathfrak{a}_T . Le but de cette section est de prouver la partie existence du critère valuatif de propreté pour le morphisme f^ξ qui se résume au théorème suivant.

Théorème 8.1. — *Soit κ une extension algébriquement close de k . Soit R un anneau de valuation discrète, complet et de corps résiduel κ . Soit K le corps des fractions de R et \overline{K} une clôture algébrique de K .*

Soit $(a, t) \in \mathcal{A}(R)$ et soit $m_K \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(K)$ tel que $f(m_K) = (a, t)$.

Il existe une extension finie $K' \subset \overline{K}$ de K et $m \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(R')$, où R' est la clôture intégrale de R dans K' , tels que

1. *l'image de m dans $\overline{\mathcal{M}}^\xi(K')$ est isomorphe à celle de m_K ;*
2. *$f(m) = (a, t)$.*

La démonstration du théorème 8.1 va nous occuper jusqu'à la fin de cette section.

8.2. Quelques mots sur la démonstration. — Dans [23] (§3 théorème), Langton a montré que le champ des fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe projective et lisse satisfait la partie existence du critère valuatif de propreté. En adaptant les arguments de Langton, Nitsure (cf. [26] section 6) a démontré le théorème 8.1 dans le cas $G = GL(n)$ et $\xi = 0$. Faltings a réussi à étendre cette démonstration à tout groupe G réductif dans le cas d'un corps de base de caractéristique 0 et pour $\xi = 0$ (cf. [16] théorème II.4). Sa démonstration ne semble cependant pas s'étendre au cas d'un corps de base de caractéristique positive. Dans [21], Heinloth a démontré l'analogue du théorème de Langton pour le champ des G -torseurs sur une courbe projective et lisse sur un corps de base caractéristique nulle ou "pas trop petite". Notre démonstration reprend en partie les arguments de Heinloth, eux-mêmes inspirés par ceux de Langton.

Esquissons les grandes lignes de notre démonstration. Les notations sont celles du théorème 8.1. Soit C_K et C_κ respectivement les fibres générique et spéciale de la courbe $C \times_k R$ sur R . Soit $(a, t) \in \mathcal{A}(R)$ sur cette courbe et $m_K \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(K)$ un triplet de Hitchin ξ -semi-stable au-dessus de C_K de caractéristique (a, t) . Les énoncés d'existence qui suivent exigent parfois de remplacer K par une extension finie, ce qu'on ne rappellera pas à chaque fois. Un tel triplet m_K s'étend en un triplet m_R sur toute la courbe C_R (cf. §8.4). La fibre spéciale m_κ du prolongement n'est pas nécessairement ξ -semi-stable. Cependant, on peut choisir le prolongement m_R de sorte que la fibre spéciale m_κ soit le moins " ξ -instable" possible, ce par quoi on entend que la distance d de ξ au convexe $\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$ défini à la section 5) est minimale (cf. §8.7). Si elle est nulle, m_κ est ξ -semi-stable. Sinon, il existe Q un sous-groupe parabolique maximal de G tel que la face de $\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$ associée à

Q contienne le point où cette distance est réalisée (cf. §8.8). Le prolongement m_R est donné par des “données de recollement” (cf. §8.13, le résultat de [14] y joue un rôle crucial et nécessite la réduction au cas semi-simple du §8.5). En conjuguant ces données par un K -point convenable du centre de Q , on obtient un autre triplet m'_R qui est en fibre générique isomorphe à m_K et dont la face de $\overline{\mathcal{C}}_{m'_\kappa}$ associé au sous-groupe parabolique Q^- opposé à Q est égale à la face de $\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$ associé à Q . Par minimalité de d , cela force le convexe $\overline{\mathcal{C}}_{m'_\kappa}$ à être dégénéré : les faces de $\overline{\mathcal{C}}_{m'_\kappa}$ associés à Q et Q^- sont dans le même hyperplan affine. Mais cela implique que la réduction à Q de m_κ se relève en une réduction à Q du triplet $m_{R/(\pi)^2} \in \mathcal{M}(R/(\pi)^2)$ déduit de m_R par le changement de base $R \rightarrow R/(\pi)^2$ où $(\pi) \subset R$ est l'idéal maximal. On peut réitérer ce processus en changeant de K -point du centre de Q (cf. §8.16). On obtient alors une réduction de m à Q sur le complété formel $\varinjlim_n C \times_k R/\pi^n$. Par un théorème de Grothendieck, cette réduction à Q s'algérise et cela contredit alors la ξ -stabilité de m_K (cf. §8.17).

8.3. On fixe désormais des objets R , κ , K et \overline{K} comme dans l'énoncé du théorème 8.1. Par le choix d'une uniformisante π , on identifie R à l'anneau $\kappa[[\pi]]$.

8.4. Le théorème 8.1 pour le champ \mathcal{M} . — Montrons tout d'abord que le théorème 8.1 vaut lorsqu'on remplace le champ $\overline{\mathcal{M}}^\xi$ par le champ \mathcal{M} tout entier. C'est bien connu. Nous ne donnons un argument que par souci d'exhaustivité. On reprend les hypothèses du théorème 8.1 excepté qu'on ne suppose pas le point $m_K \in \mathcal{M}(K)$ ξ -semi-stable. Le point m_K s'explicite comme un triplet $(\mathcal{E}_K, \theta_K, t)$. Soit η le point générique de $C_K = C \times_k K$. Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut et on va supposer que le torseur \mathcal{E}_K est trivial au point η (cf. lemme 4.1). Fixons donc une telle trivialisation : on en déduit une trivialisation de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ en η et donc un élément $Y \in \mathfrak{g}(F)$, où F est le corps des fonctions de C_K , qui est l'image de θ par cette dernière trivialisation. Notons que $\chi(Y)$ est égal à la restriction a_η de a à η .

Soit B l'anneau local du point fermé de $C_R = C \times_k \mathrm{Spec}(R)$ défini par l'idéal engendré par π . C'est un anneau de valuation discrète de corps des fractions F . En prenant une section de Kostant (par exemple), on voit qu'il existe $X \in \mathfrak{g}(B)$ telle que $\chi(X) = a|_{\mathrm{Spec}(B)}$. Puisque $\chi(X) = \chi(Y)$, le lemme 3.6 entraîne que, quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer qu'il existe $g \in G(F)$ tel qu'on ait $\mathrm{Ad}(g)X = Y$. On peut alors avec cet élément $g \in G(F)$ recoller le torseur \mathcal{E}_K et la section θ avec le couple $(G \times_k B, X)$ sur $\mathrm{Spec}(B)$. On obtient ainsi un couple $(\mathcal{E}_U, \theta_U)$ qui prolonge $(\mathcal{E}_K, \theta_K)$ à un ouvert U de C_R qui contient tous les points de codimension ≤ 1 . Mais tout G -torseur sur un tel ouvert U se prolonge de manière unique en un G -torseur sur C_R tout entier (cf. [13] théorème 6.13). On obtient un G -torseur \mathcal{E} sur C_R qui prolonge \mathcal{E}_K . Le fibré $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ possède une section sur U à savoir θ_U . Mais comme U contient tous les points de codimension ≤ 1 et que $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ est affine sur C , cette section se prolonge de manière unique sur C_R (cf. [18] corollaire 20.4.12). On a ainsi obtenu un couple (\mathcal{E}, θ) . Les points $\chi(\theta)(\infty_R)$ et $\chi(t)$ sont deux points de $\mathrm{car}(R)$. Ils sont en fait égaux puisque leurs images dans $\mathrm{car}(K)$ sont égales. Ainsi le couple (\mathcal{E}, θ) se complète en un triplet $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(R)$ d'où le théorème 8.1 pour \mathcal{M} .

8.5. Réduction au cas semi-simple. — Dans ce paragraphe, on montre que le théorème 8.1 pour tout groupe semi-simple implique le théorème 8.1 pour tout groupe réductif.

Soit G un groupe réductif connexe sur k d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et T un sous-tore maximal. Soit G_{der} le groupe dérivé de G et $\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}$ son algèbre de Lie. La décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathrm{der}} \oplus \mathfrak{z}$$

induit une décomposition

$$(8.1) \quad \mathrm{car}_G = \mathrm{car}_{G_{\mathrm{der}}} \oplus \mathfrak{z}$$

Soit A_G le centre connexe de G et \mathfrak{z} son algèbre de Lie. Soit $G' = G/A_G$. C'est un groupe semi-simple d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ et qui admet $T' = T/A_G$ comme sous-tore maximal. Le morphisme évident $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ induit des isomorphismes $\mathfrak{g}_{\mathrm{der}} \rightarrow \mathfrak{g}'$ et

$$(8.2) \quad \mathrm{car}_{G_{\mathrm{der}}} \simeq \mathrm{car}_{G'}.$$

La projection de car_G sur $\text{car}_{G_{\text{der}}}$ définie par (8.1) composée avec l'isomorphisme (8.2) et le morphisme évident $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}' = \mathfrak{t}/\mathfrak{z}$ induisent un morphisme $\mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}_{G'}$. La bijection évidente $\mathcal{L}^G(T) \rightarrow \mathcal{L}^{G'}(T')$ est compatible à la décomposition de la proposition 3.4.

Soit S un k -schéma affine et $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}_G(S)$. Soit \mathcal{E}' le G' -torseur obtenu lorsqu'on pousse \mathcal{E} par le morphisme $G \rightarrow G'$. La section θ poussée par le morphisme $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ fournit une section θ' de $\text{Ad}_D(\mathcal{E}')$. Soit t' l'image de t par le morphisme $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}' = \mathfrak{t}/\mathfrak{z}$. Le triplet $m' = (\mathcal{E}', \theta', t')$ appartient à $\mathcal{M}_{G'}(S)$. On obtient ainsi un morphisme $\mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{M}_{G'}$ qui à m associe m' . Il s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_G & \longrightarrow & \mathcal{M}_{G'} \\ \downarrow f_G & & \downarrow f_{G'} \\ \mathcal{A}_G & \longrightarrow & \mathcal{A}_{G'} \end{array}$$

En utilisant le morphisme $P \rightarrow P/A_G$, il est clair que toute réduction de m à un sous-groupe parabolique P donne naturellement une réduction de m' à P/A_G . Si S est le spectre d'un corps, on obtient ainsi une bijection naturelle entre les réductions de m et celles de m' compatible à la bijection $\mathcal{F}^G(T) \rightarrow \mathcal{F}^{G'}(T')$. Le morphisme surjectif évident $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_{T'}$ induit un isomorphisme $\mathfrak{a}_T^G \simeq \mathfrak{a}_{T'}^G$. Il est alors évident sur les définitions que le point m est ξ -semi-stable si et seulement si m' est ξ^G -semi-stable, où ξ^G est la projection de ξ sur \mathfrak{a}_T^G .

Revenons à la situation du théorème 8.1. Soit $(a, t) \in \mathcal{A}_G(R)$ et $m_K = (\mathcal{E}_K, \theta_K, t) \in \overline{\mathcal{M}}_G^\xi(K)$ tel que $f_G(m_K) = (a, t)$. Soit $m'_K = (\mathcal{E}'_K, \theta'_K, t') \in \overline{\mathcal{M}}_{G'}^\xi(K)$ image de m_K par le morphisme $\mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{M}_{G'}$. Soit $(a', t') = f_{G'}(m'_K)$. Le point (a', t') appartient à $\mathcal{A}_{G'}(R)$ puisque c'est l'image de (a, t) . Le théorème 8.1 pour le groupe semi-simple G' implique que, quitte à changer K par une extension finie K' dans \overline{K} et R par sa clôture intégrale dans K' , on peut supposer que m'_K se prolonge en un triplet $m' = (\mathcal{E}', \theta', t') \in \overline{\mathcal{M}}_{G'}^\xi(R)$ qui prolonge m_K . Quitte de nouveau à changer K et R comme ci-dessus, on peut supposer que le G' -torseur \mathcal{E}' est trivial sur le spectre de B l'anneau local du point de C_R défini par (π) (cf. [14] théorème 2). Fixons une telle trivialisations. On en déduit une trivialisations de $\text{Ad}_D(\mathcal{E}')$ sur $\text{Spec}(B)$; celle-ci envoie θ' sur un point $Y' \in \mathfrak{g}'(B) \simeq \mathfrak{g}_{\text{der}}(B)$ tel que $\chi_{G'}(Y) = a'_{|\text{Spec}(B)}$. En écrivant $a'_{|\text{Spec}(B)} = a'_{|\text{Spec}(B)} \oplus Z$ avec $Z \in \mathfrak{z}(B)$ suivant (8.1) et (8.2), on obtient un point $Y = Y' + Z \in \mathfrak{g}(B)$. Toute trivialisations de \mathcal{E}_K sur un ouvert U de C_K donne des trivialisations de \mathcal{E}'_K et $\text{Ad}_D(\mathcal{E}'_K)$ sur le même ouvert ainsi que des points X et X' sections respectives de $\mathfrak{g} \times_k U$ et $\mathfrak{g}' \times_k U$ qui se déduisent de θ et θ' . La condition de recollement des trivialisations de (\mathcal{E}', θ') sur $\text{Spec}(B)$ et U se traduit par l'existence d'un élément $g' \in G'(F)$ tel que $\text{Ad}(g')X' = Y'$ où F est le corps des fonctions de C_R . Tout relèvement $g \in G(F)$ de g' vérifie $\text{Ad}(g)X = Y$ par construction de Y . Or l'obstruction à un tel relèvement vit dans $H^1(F, A_G)$. Quitte à remplacer K par une extension, on peut supposer que cet ensemble est réduit à la classe triviale (cf. [27] chap. III §2) et donc qu'un tel relèvement existe. D'un tel relèvement, on déduit, comme au paragraphe 8.4, un prolongement $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}_G(R)$ de m_K . Par construction, l'image de (\mathcal{E}, θ, t) dans $\mathcal{M}_{G'}(R)$ coïncide avec m' sur un ouvert de C_R qui contient tous les points de codimension ≤ 1 . Par un argument déjà évoqué au paragraphe 8.4, l'image de (\mathcal{E}, θ, t) est donc (isomorphe à) m' . Il s'ensuit qu'on a $m \in \overline{\mathcal{M}}_G^\xi(R)$ comme voulu.

8.6. Les points m_K , (a, t) et (\bar{a}, \bar{t}) . — Désormais et ce jusqu'à la fin de la preuve du théorème 8.1, on suppose que G est *semi-simple*. On se place sous les hypothèses du théorème 8.1. Soit $(a, t) \in \mathcal{A}(R)$ et soit $m_K \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(K)$ tel que $f(m_K) = (a, t)$. Soit $(\bar{a}, \bar{t}) \in \mathcal{A}(\kappa)$ le point déduit de (a, t) par le changement de base $\text{Spec}(\kappa) \rightarrow \text{Spec}(R)$.

8.7. Le réel d et le point $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(R)$. — Pour toute extension $K' \subset \overline{K}$ de degré fini sur K , soit $m_{K'} \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(K')$ déduit de m_K par le changement de base $\text{Spec}(K') \rightarrow \text{Spec}(K)$. Soit R' la clôture intégrale R dans K' . Soit $m_{R'} \in \mathcal{M}(R')$ un prolongement de $m_{K'}$ à $C \times_k R'$. L'anneau R' est un anneau de valuation discrète de corps résiduel κ . Soit m_κ le point de $\mathcal{M}(\kappa)$ déduit de $m_{R'}$ par le changement de base $\text{Spec}(\kappa) \rightarrow \text{Spec}(R')$. Soit

$$d(\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}, \xi)$$

la distance de ξ au convexe $\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$ (cf. 5.5).

Lemme 8.2. — *L'ensemble des réels $d(\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}, \xi)$ pour tous R' et $m_{R'}$ comme ci-dessus admet un plus petit élément.*

Démonstration. — Cet ensemble est non vide (cf. §8.4) et minoré par 0. Il est même discret et fermé dans \mathfrak{a}_T puisqu'inclus dans l'ensemble des distances de ξ aux sous-espaces $X + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G$ pour $X \in X_*(Q)$ et $Q \in \mathcal{F}$ (cf. corollaire 6.12). Il contient donc sa borne inférieure. \square

Soit $d \geq 0$ le plus petit élément de l'ensemble considéré dans le lemme 8.2. Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut et on va supposer qu'il existe

$$m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(R)$$

dont l'image dans $\mathcal{M}(K)$ est le point m_K de départ et telle que la distance de ξ au convexe $\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$ soit d , où $m_\kappa \in \mathcal{M}(\kappa)$ est l'image de m . Dans toute la suite, on fixe un tel m .

Comme m est ξ -semi-stable sur C_K , il sera ξ -semi-stable si et seulement s'il l'est aussi sur C_κ . On a donc les équivalences suivantes :

$$m \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(R) \Leftrightarrow m_\kappa \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(\kappa) \Leftrightarrow d = 0.$$

Ainsi le théorème 8.1 est vrai pour le point m_K si et seulement si $d = 0$. Dans la suite, on suppose qu'on a

$$d > 0$$

et on va montrer qu'on aboutit à une contradiction.

8.8. Le sous-groupe de Levi L et les sous-groupes paraboliques Q_0 et Q . — Soit $L \in \mathcal{L}$ tel que $f(m_\kappa) \in \chi_G^L(\mathcal{A}_{L, \text{ell}}(\kappa))$ (cf. proposition 3.4). Soit ϱ le ξ -point de Harder-Narasimhan de m_κ . D'après la proposition 6.11, il existe un sous-groupe parabolique $Q_0 \in \mathcal{F}(L)$ tel qu'on ait

- $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_{Q_0}^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$;
- ϱ appartient au sous-espace affine

$$-\deg(m_{\kappa, Q_0}) + \mathfrak{a}_T^{Q_0}.$$

où m_{κ, Q_0} est une réduction de m_κ à Q_0 (ici $\mathfrak{a}_G = \{0\}$ puisque G est semi-simple). Par hypothèse, la distance de ϱ à $\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$ n'est pas nulle ; le sous-groupe parabolique Q_0 est donc propre. Dans toute la suite on fixe $Q \in \mathcal{F}(Q_0)$ maximal parmi les sous-groupes paraboliques propres de G qui contiennent Q_0 . Soit Q^- le sous-groupe parabolique opposé à Q , au sens où $Q^- \cap Q$ est l'unique facteur de Levi de Q qui contient T .

8.9. Quelques notations : V , $i_{R,v}$, $j_{R,v}$ etc. — Soit V est un ensemble fini de points fermés de C_κ qui contient le support du diviseur

$$D_\kappa = D \times_k \kappa = \sum_{v \in V} d_v v$$

ainsi que le point ∞_κ . Soit $C_\kappa^V = C_\kappa - V$ et $\kappa[C^V]$ l'algèbre des fonctions régulières sur C_κ^V . On reprend les notations de la section 7 en particulier le diagramme (7.1) pour la courbe $C_\kappa = C \times_k \kappa$ où sont définis les morphismes j_A , $i_{A,v}$ etc. pour tout point $v \in V$ et toute κ -algèbre.

8.10. Le point t_a . — Soit t_a l'unique point de $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}[[z_\infty]](R)$ qui vérifie les deux assertions suivantes :

- la réduction modulo z_∞ de t_a est le point $t \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}(R)$;
- $\chi_G(t_a) = \chi_D(\theta) \circ i_{R, \infty}$.

L'existence et l'unicité de t_a résulte du fait que χ induit un morphisme étale de $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}$ sur $\mathfrak{c}^{G\text{-reg}}$. Soit

$$\bar{t}_a \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}[[z_\infty]](\kappa)$$

la réduction modulo π de t_∞ . Notons qu'on a $\bar{t}_a = \bar{t}_{\bar{a}}$ où $t_{\bar{a}}$ est l'unique point de $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}[[z_\infty]](\kappa)$ de réduction \bar{t} et de caractéristique \bar{a} .

8.11. Trivialisation de m sur un ouvert de la fibre spéciale. — Soit $m_\kappa = (\mathcal{E}_\kappa, \theta_\kappa, \bar{t}) \in \mathcal{M}(\kappa)$ le point déduit de m par le changement de base $\text{Spec}(\kappa) \rightarrow \text{Spec}(R)$. On a le lemme suivant.

Lemme 8.3. — *Quitte à rajouter un nombre fini de points à V , on est dans la situation suivante. Il existe une trivialisation du G -torseur $j_\kappa^*(\mathcal{E}_\kappa)$ sur C_κ^V*

$$\beta_\kappa : j_\kappa^*(\mathcal{E}_\kappa) \rightarrow G \times_k C_\kappa^V.$$

telle que l'isomorphisme de schémas en groupes qui s'en déduit

$$\iota_\kappa : \text{Aut}_G(j_\kappa^*(\mathcal{E}_\kappa)) \rightarrow G \times_k C_\kappa^V$$

satisfasse la condition : l'élément $d\iota_\kappa(j_\kappa^*\theta)$, où $d\iota_\kappa$ est le morphisme dérivé de ι_κ , vérifie :

1. $d\iota_\kappa(j_\kappa^*\theta)$ appartient à $\mathfrak{l}(\kappa[C_\kappa^V])$;
2. $d\iota_\kappa(j_\kappa^*\theta)$ est conjugué à \bar{t}_∞ par un élément de $l \in L((z_\infty))(\kappa)$.

Démonstration. — Soit F est le corps des fonctions de C_κ . Comme κ est algébriquement clos, le G -torseur \mathcal{E}_κ est trivial au point générique de C_κ (cf. lemme 4.1). Par le choix d'une trivialisation, on obtient aussi une trivialisation générique de $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_\kappa)$ qui envoie θ sur un certain élément $X \in \mathfrak{g}(F)$. Soit $(\bar{a}, \bar{t}) = f(m_\kappa)$. Cet élément appartient à $\mathcal{A}_{L, \text{ell}}(\kappa)$ d'après la définition de L (cf. §8.8). D'après le corollaire 3.9, il existe X' semi-simple et G -régulier dans $\mathfrak{l}(F)$ et $l \in L((z_\infty))(\kappa)$ tel que

- (A) $\chi_G(X') = \bar{a}|_{\text{Spec}(F)}$;
- (B) $\text{Ad}(l)X' = \bar{t}_\infty$.

Notons qu'on a $\chi_G(X) = \chi_G(X')$ par définition de \bar{a} . Le lemme 3.6 implique que, quitte à changer la trivialisation générique de \mathcal{E}_κ , on peut supposer que X vérifie les conditions (A) et (B) ci-dessus.

On obtient alors le lemme puisque toute trivialisation générique de \mathcal{E}_κ s'étend à un ouvert de C_κ et que l'élément X lui aussi se prolonge à un ouvert. □

8.12. Trivialisation de m sur des disques formels de la fibre spéciale. — Dans la suite, on fixe une trivialisation

$$(8.3) \quad \beta_\kappa : j_\kappa^*(\mathcal{E}_\kappa) \rightarrow G \times_k C_\kappa^V.$$

qui vérifie les conditions du lemme 8.3.

Pour tout $v \in V$ soit

$$(8.4) \quad \alpha_{\kappa, v} : i_{\kappa, v}^*(\mathcal{E}_\kappa) \rightarrow G \times_k \kappa[[z_v]].$$

un isomorphisme G -équivariant. Un tel isomorphisme existe. En effet, cela revient à se donner une section du toseur $i_{\kappa, v}^*(\mathcal{E}_\kappa)$ au-dessus de $\text{Spec}(\kappa[[z_v]])$. Une telle section existe au moins au-dessus du point spécial et, par lissité, elle se prolonge à $\text{Spec}(\kappa[[z_v]])$.

Lemme 8.4. — *On peut choisir les trivialisations $\alpha_{\kappa, v}$ de sorte le triplet*

$$(8.5) \quad (\bar{X}, (\bar{g}_v)_{v \in V}, \bar{t})$$

associé au point $m_\kappa = (\mathcal{E}_\kappa, \theta_\kappa, \bar{t}) \in \mathcal{M}(\kappa)$ et aux trivialisations $(\alpha_{\kappa, v}, \beta_\kappa)$ par la bijection de la proposition 7.1 satisfasse les conditions suivantes :

1. $\bar{g}_v \in Q((z_v))(\kappa)$;
2. $\alpha_{\kappa, \infty}(i_{\kappa, \infty}^*\theta) = \bar{t}_a$;

3. $\bar{g}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$.

Démonstration. — Quel que soit le choix de $\alpha_{\kappa,v}$, on a

$$\bar{g}_v \in G((z_v))(\kappa).$$

La décomposition d'Iwasawa

$$G((z_v))(\kappa) = Q((z_v))(\kappa) \cdot G[[z_v]](\kappa)$$

montre qu'on peut toujours modifier $\alpha_{\kappa,v}$ de sorte qu'on ait

$$(8.6) \quad \bar{g}_v \in Q((z_v))(\kappa)$$

d'où l'assertion 1.

On a

$$\mathrm{Ad}(\bar{g}_\infty)^{-1} \bar{X} \in \mathfrak{g}[[z_\infty]](\kappa).$$

L'élément $\chi(\bar{X})$, après changement de base à $\mathrm{Spec}(k[[z_\infty]])$, appartient à $\mathbf{car}[[z_\infty]](\kappa)$ et sa réduction modulo z_∞ coïncide avec celle de $\chi(\bar{t}_\infty)$. Comme χ est étale au-dessus de $\mathbf{car}^{\mathrm{reg}}$, on a

$$\chi(\mathrm{Ad}(\bar{g}_\infty)^{-1} \bar{X}) = \chi(\bar{X}) = \chi(\bar{t}_\infty).$$

Le lemme 8.5 ci-dessous montre qu'on peut modifier $\alpha_{\kappa,\infty}$ de sorte qu'on ait

$$(8.7) \quad \mathrm{Ad}(\bar{g}_\infty)^{-1} \bar{X} = \bar{t}_\infty.$$

Mais d'après le lemme 8.3, \bar{X} et t_∞ sont conjugués sous $L((z_\infty))(\kappa)$. Il s'ensuit qu'on a $\bar{g}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$. \square

Lemme 8.5. — Soit $Y \in \mathfrak{g}[[z_\infty]](R)$ tel que $\chi_G(Y) = \chi_G(t_a)$. Il existe $g \in G[[z_\infty]](R)$ tel que $\mathrm{Ad}(g)Y = t_a$.

Le même énoncé vaut lorsqu'on remplace R par κ et t_a par \bar{t}_a .

Démonstration. — Soit \mathcal{T} le $R[[z_\infty]]$ -schéma défini pour toute $R[[z_\infty]]$ -algèbre B par

$$\mathcal{T}(B) = \{h \in G(B) \mid \mathrm{Ad}(h)(Y) = t_a\}.$$

Montrons que le schéma \mathcal{T} est lisse sur $\mathrm{Spec}(R[[z_\infty]])$. Notons tout d'abord que les centralisateurs de Y et t_a dans $G \times_k R[[z_\infty]]$ sont des sous-schémas en tores : cela résulte du fait que $\theta_\infty \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}(R[[z_\infty]])$ et $\chi_G(t_a) = \chi_G(Y)$. Par conséquent, localement pour la topologie étale, ces centralisateurs sont conjugués. Comme Y et t_a ont même caractéristique, ces éléments sont localement conjugués pour la topologie étale. Ainsi le schéma \mathcal{T} a localement des sections pour la topologie étale. C'est donc un tore sous le schéma en tores $T \times_k R[[z_\infty]]$. Il est donc lisse.

D'après le lemme (3.6), le schéma $\mathcal{T} \times_{R[[z_\infty]]} \kappa$ possède des sections. Par lissité de \mathcal{T} sur $R[[z_\infty]]$ et par complétude de $R[[z_\infty]] \simeq \kappa[[\pi, z_\infty]]$, cette section se relève en une section $h \in G[[z_\infty]](R)$ de \mathcal{T} .

La seconde assertion se démontre de la même façon. \square

8.13. Trivialisation admissibles de (\mathcal{E}, θ, t) . — Désormais on fixe des trivialisations $(\alpha_{\kappa,v}, \beta_\kappa)$ de m_κ qui satisfont les lemmes 8.3 et 8.4. Soit $C_R^V = C_\kappa^V \times_\kappa R$. Soit $R[C^V] = \kappa[C^V] \otimes_\kappa R$.

Définition 8.6. — Une *trivialisation admissible* de $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$ est la donnée d'isomorphismes G -équivalents

$$(8.8) \quad \beta_R : j_R^* \mathcal{E} \rightarrow G \times_k R[C^V].$$

et pour tout $v \in V$

$$(8.9) \quad \alpha_{R,v} : i_{R,v}^* \mathcal{E} \rightarrow G \times_k R[[z_v]]$$

qui satisfont les conditions suivantes

1. l'isomorphisme β_R se spécialise en l'isomorphisme β_κ de (8.3) ;
2. l'isomorphisme $\alpha_{R,v}$ se spécialise en l'isomorphisme α_{κ_v} de (8.4) ;
3. $\alpha_{R,\infty}(i_{R,\infty}^* \theta) = t_a$.

Remarque. — Soit $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ le triplet associé à $m \in \mathcal{M}(R)$ et aux trivialisations 8.8 et 8.9 par la proposition 7.1. Alors ces trivialisations forment une trivialisation admissible de m si et seulement si

- la réduction modulo π du triplet $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ est le triplet $(\bar{X}, (\bar{g}_v)_{v \in V}, \bar{t})$ défini en (8.5).
- $\text{Ad}(g_\infty)^{-1}X = t_a$.

Lemme 8.7. — *Quitte à remplacer K par une extension finie et R par sa clôture intégrale dans cette extension, on peut supposer qu'il existe des trivialisations admissibles de (\mathcal{E}, θ, t) .*

Démonstration. — Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut et on va supposer que $j_R^* \mathcal{E}$ est trivial sur C_R^V (comme G est semi-simple c'est possible par le théorème 3 de [14]). Le torseur $j_R^* \mathcal{E}$ possède donc des sections au-dessus de C_R^V . On en déduit un isomorphisme β_R comme en (8.8). Quitte à traduire cette section par un élément de $G(\kappa[C^V])$, on peut supposer que β_R satisfait la condition 1 ci-dessus.

Soit $v \in V$. En utilisant la lissité de \mathcal{E} sur C_R , on voit que le torseur $i_{R,v}^* \mathcal{E}$ possède des sections sur $\text{Spec}(R[[z_v]])$. On en déduit des isomorphismes $\alpha_{R,v}$ comme en (8.9). Comme précédemment, on se ramène au cas où $\alpha_{R,v}$ satisfait la condition 2.

Par la proposition 7.1, on déduit des trivialisations β_R et $\alpha_{R,v}$ un triplet $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ comme ci-dessus. Soit

$$Y = \text{Ad}(g_\infty^{-1})X.$$

C'est un élément de $\mathfrak{g}[[z_\infty]](R)$ qui vérifie $\chi_G(Y) = \chi_G(X) = \chi_G(t_a)$. Le lemme 8.5 montre que Y et t_a sont conjugués sous $G[[z_\infty]](R)$. Cela permet de conclure. \square

8.14. Sous-groupes unipotents. — Soit $\Phi^+ = \Phi_T^{N_Q}$ et $\Phi^- = \Phi_T^{N_{Q^-}}$ les ensembles respectifs de racines de T dans les radicaux unipotents N_Q et N_{Q^-} . La composante neutre A_Q du centre de Q est un tore de dimension 1. Soit

$$(8.10) \quad \lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow A_Q$$

l'unique isomorphisme qui vérifie $\alpha(\lambda) > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. Pour tout entier $i > 0$, soit

$$\Phi_i^+ = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha(\lambda) = i\}$$

et

$$\Phi_i^- = -\Phi_i^+$$

en notation additive.

Pour tout $\alpha \in \Phi^+ \cup \Phi^-$, soit N_α le sous-groupe unipotent associé et $\zeta_\alpha : \mathbb{G}_a \rightarrow N_\alpha$ le groupe à un paramètre additif associé à α . Pour tout entier $i > 0$, soit N_i^- le sous-groupe unipotent engendré par les sous-groupes N_α tels que $\alpha(\lambda) \leq -i$. On obtient ainsi une suite décroissante de sous-groupes unipotents

$$\dots \subset N_i^- \subset \dots \subset N_1^- = N_{Q^-}$$

et pour i assez grand on a

$$N_i^- = \{1\}.$$

On vérifie la relation suivante sur les commutateurs

$$[N_i, N_j] \subset N_{i+j}.$$

8.15. Condition auxiliaire sur V . — Commençons par le lemme suivant.

Lemme 8.8. — *Il existe V_0 un ensemble fini non vide de points fermés de C_κ tel que pour toute $\Gamma(C_\kappa - V_0, \mathcal{O}_{C_\kappa})$ -algèbre B et tout entier $i \geq 1$, l'application de $N_i^-(B)$ dans $\mathfrak{n}_i^-(B)$ définie par*

$$n \in N_i^-(B) \mapsto \text{Ad}(n^{-1})\bar{X} - \bar{X}$$

est bijective.

Démonstration. — Soit F le corps des fonctions de $C \times_k \kappa$. On laisse au lecteur le soin de prouver que le morphisme $n \mapsto \text{Ad}(n^{-1})\bar{X} - \bar{X}$ induit un isomorphisme de $N_i^- \times_k F$ sur $\mathfrak{n}_i^- \times_k F$. Il se prolonge donc en un isomorphisme à un ouvert de Zariski de C_κ complémentaire d'un ensemble fini V_0 . Le lemme s'en déduit. \square

Quitte à agrandir V , on suppose dans la suite que V contient l'ensemble fini V_0 donné par le lemme 8.8.

8.16. Constructions de certaines trivialisations admissibles. — Soit r le plus petit multiple commun des entiers i tels que $\Phi_i^+ \neq 0$. Soit $R' = R[\pi^{\frac{1}{r}}]$ et K' le corps des fractions de R' . Pour tout entier j soit $z_j \in A_Q(K')$ défini par

$$z_j = \lambda(\pi^{\frac{j}{r}})$$

où λ est l'isomorphisme $\mathbb{G}_m \rightarrow A_Q$ défini en (8.10).

Soit $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ une trivialisation admissible de $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$ (cf. définition 8.6). Soit $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.1.

Définition 8.9. — Soit

$$j(\beta_R, (\alpha_{R,v})) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

la borne supérieure de l'ensemble des entiers $j \in \mathbb{N}$ qui vérifient

1. $\text{Ad}(z_j)X \in \mathfrak{g}(R'[C^V])$
2. pour tout $v \in V$,

$$z_j g_v z_j^{-1} \in G((z_v))(R').$$

Proposition 8.10. — *Pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, il existe une trivialisation admissible $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ de $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$ telle que*

$$j(\beta_R, (\alpha_{R,v})) \geq j.$$

Démonstration. — Supposons la proposition mise en défaut. Soit $j \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que

$$j \geq j(\beta_R, (\alpha_{R,v}))$$

pour toute trivialisation admissible $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ de m . Comme on a $\bar{X} \in \mathfrak{l}(\kappa[C^V])$ et $\bar{g}_v \in Q((z_v))(\kappa)$ (cf. assertion 1 du lemme 8.3 et assertion 1 du lemme 8.4), on a

$$j \geq 1.$$

Soit $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ une trivialisation admissible de m telle que

$$j = j(\beta_R, (\alpha_{R,v})).$$

Soit $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.1.

Soit val_π la valuation de R normalisée par $\text{val}_\pi(\pi) = 1$. Cette valuation s'étend à R' et à $R'[C^V]$ de manière évidente. Pour tout $\alpha \in \Phi^\pm$, le k -espace vectoriel \mathfrak{n}_α est de dimension 1. Pour

tout vecteur $X_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha(R'[C^V])$, soit $\text{val}_\pi(X_\alpha)$ la valuation du coefficient de X_α sur un vecteur non nul de $\mathfrak{n}_\alpha(k)$.

Suivant la décomposition en espaces propres sous A_Q

$$(\oplus_{\alpha \in \Phi^\pm} \mathfrak{n}_\alpha) \oplus \mathfrak{m}_Q$$

on écrit

$$(8.11) \quad X = \sum_{\alpha \in \Phi^\pm} X_\alpha + X_{M_Q}.$$

Comme la réduction modulo π de X est \bar{X} qui appartient à $\mathfrak{l}(\kappa[C^V])$, on a

$$(8.12) \quad \text{val}(X_\alpha) \geq 1$$

pour tout $\alpha \in \Phi^\pm$. De plus, la réduction modulo π de X_{M_Q} est \bar{X} .

On a aussi la décomposition

$$\text{Ad}(z_j)X = \sum_{\alpha \in \Phi^\pm} \pi^{\frac{j\alpha(\lambda)}{r}} X_\alpha + X_{M_Q}.$$

Par la condition 1 de la définition 8.9, on a pour tout $\alpha \in \Phi^\pm$

$$(8.13) \quad \frac{j\alpha(\lambda)}{r} + \text{val}_\pi(X_\alpha) \geq 0.$$

Pour $\alpha \in \Phi^+$, cette inégalité est stricte.

Lemme 8.11. — *Il existe une trivialisation admissible $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ de m pour laquelle*

- $j = j((\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V}))$;
- *l'inégalité (8.13) est stricte pour tout $\alpha \in \Phi^-$.*

Démonstration. — Partons d'une trivialisation admissible $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ de m pour laquelle il existe $\alpha \in \Phi^-$ tel que

$$(8.14) \quad \frac{j\alpha(\lambda)}{r} + \text{val}_\pi(X_\alpha) = 0.$$

Soit i le plus petit entier tel qu'il existe $\alpha \in \Phi_i^-$ qui vérifie l'égalité (8.14). Soit

$$Y = \text{Ad}(z_j)X \in \mathfrak{g}(R'[C^V])$$

et \bar{Y} la réduction modulo $\pi^{\frac{1}{r}}$ de Y . Alors \bar{Y} appartient à $\bar{X} + \mathfrak{n}_i^-(\kappa[C^V])$. D'après le lemme 8.8, il existe $n_i \in N_i^-(\kappa[C^V])$ tel que

$$(8.15) \quad \text{Ad}(n_i^{-1})\bar{X} = \bar{Y}.$$

Pour tout $\alpha \in \Phi_i^-$ soit $u_\alpha \in \kappa[C^V]$ et $n_{i+1} \in N_{i+1}^-(\kappa[C^V])$ tels qu'on ait

$$(8.16) \quad n_i = n_{i+1}n$$

avec

$$n = \prod_{\alpha \in \Phi_i^-} \zeta_\alpha(u_\alpha).$$

Comme n_{i+1} est un élément de $N_{i+1}^-(\kappa[C^V])$, on a

$$\text{Ad}(n_{i+1}^{-1})\bar{X} \in \bar{X} + \mathfrak{n}_{i+1}^-(\kappa[C^V]).$$

En comparant avec (8.15) et (8.16), on obtient

$$(8.17) \quad \text{Ad}(n)\bar{Y} \in \bar{X} + \mathfrak{n}_{i+1}^-(\kappa[C^V]).$$

Remarquons que

$$z_j^{-1}nz_j = \prod_{\alpha \in \Phi_i^-} \zeta_\alpha(\pi^{\frac{ji}{r}}u_\alpha)$$

appartient à $N_i(R[C^V])$ et que sa réduction modulo π est triviale. En effet, par hypothèse, il existe $\alpha \in \Phi_i^-$ tel que l'égalité (8.14) soit vraie. On a donc par (8.12)

$$\frac{ji}{r} = -\frac{j\alpha(\lambda)}{r} = \text{val}_\pi(X_\alpha) \in \mathbb{N}^*.$$

Le triplet $(\text{Ad}(z_j^{-1}nz_j)X, (z_j^{-1}nz_jg_v)_{v \in V}, t)$ définit par la bijection de la proposition 7.1 une trivialisatation de m de la forme $(\beta'_R, (\alpha'_{R,v})_{v \in V})$ qui est encore admissible. Il est clair sur la définition 8.9 qu'on a $j(\beta'_R, (\alpha'_{R,v})_{v \in V}) \geq j$ (par maximalité de j on a même égalité). Quitte à remplacer $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ par $(\beta'_R, (\alpha'_{R,v})_{v \in V})$, et vu (8.17) on se ramène au cas où \bar{Y} appartient à $\bar{X} + \mathfrak{n}_{i+1}^-(\kappa[C^V])$. Par récurrence, on peut même supposer qu'on a $\bar{Y} = \bar{X}$. Mais alors l'inégalité 8.13 est stricte. \square

Soit $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ une trivialisatation admissible de m qui satisfait les conclusions du lemme 8.11. Soit $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.1. On a donc

$$(8.18) \quad \min_{\alpha \in \Phi^-} \left(-\frac{r}{\alpha(\lambda)} \text{val}_\pi(X_\alpha) \right) > j.$$

On notera que, par définition de r , le premier membre de cet inégalité est un entier.

Soit $v \in V$ et B_v l'anneau déduit de $R((z_v))$ par localisation en l'idéal premier engendré par π . C'est un anneau de valuation discrète de corps résiduel $\kappa((z_v))$. On note encore val_π la valuation normalisée par $\text{val}_\pi(\pi) = 1$. Le point $g_v \in G((z_v))(R)$ induit alors un morphisme du trait $\text{Spec}(B_v)$ dans G . Comme la réduction modulo π de g_v est \bar{g}_v et que l'on a $\bar{g}_v \in Q((z_v))(\kappa)$ (cf. 1.(8.6)), l'image du point spécial par ce morphisme appartient à l'ouvert $N_Q M_Q N_{Q^-}$. Il s'ensuit que l'image du trait entier est dans l'ouvert $N_Q M_Q N_{Q^-}$. Il existe donc $x_v \in M_Q(B_v)$ et $b_{\alpha,v} \in B_v$ tels que pour tout $\alpha \in \Phi^\pm$ on ait

$$(8.19) \quad g_v = \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} \zeta_\alpha(b_{\alpha,v}) \right) \cdot x_v \cdot \left(\prod_{\alpha \in \Phi^-} \zeta_\alpha(b_{\alpha,v}) \right).$$

Soit $\bar{x}_v \in M_Q((z_v))(\kappa)$ la réduction modulo π de x_v . Puisque la réduction \bar{g}_v de g_v modulo π appartient à $Q((z_v))(\kappa)$, on a $\text{val}_\pi(b_{\alpha,v}) \geq 1$ pour $\alpha \in \Phi^-$ et

$$(8.20) \quad \bar{g}_v \in \bar{x}_v N_Q((z_v))(\kappa).$$

On a

$$(8.21) \quad z_j g_v z_j^{-1} = \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} \zeta_\alpha(\pi^{\frac{j\alpha(\lambda)}{r}} b_{\alpha,v}) \right) \cdot x_v \cdot \left(\prod_{\alpha \in \Phi^-} \zeta_\alpha(\pi^{\frac{j\alpha(\lambda)}{r}} b_{\alpha,v}) \right)$$

et cet élément appartient à $G((z_v))(R')$ par définition de j . On a donc pour tout $\alpha \in \Phi^\pm$

$$(8.22) \quad \frac{j\alpha(\lambda)}{r} + \text{val}_\pi(b_{\alpha,v}) \geq 0.$$

L'inégalité (8.22) est stricte pour $\alpha \in \Phi^+$.

Lemme 8.12. — *Il existe une trivialisatation admissible $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ de m pour laquelle*

1. $j = j((\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V}))$;

2. l'inégalité (8.18) est satisfaite ;
3. l'inégalité (8.22) est stricte pour tout $\alpha \in \Phi^-$.

Démonstration. — Soit $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ une trivialisation admissible de m qui satisfait les conclusions du lemme 8.11 donc les deux premières assertions. Soit $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.1. On reprend les notations utilisées ci-dessus, en particulier aux lignes (8.19) et (8.20). Soit

$$h_v = z_j g_v z_j^{-1} \in G((z_v))(R[\pi^{\frac{1}{r}}])$$

et

$$Y = \text{Ad}(z_j)X \in \mathfrak{g}(R[C^V][\pi^{\frac{1}{r}}]).$$

Lemme 8.13. — *On a les assertions suivantes*

1. le triplet $(Y, (h_v)_{v \in V}, t)$ est un triplet qui satisfait les conditions de la proposition 7.1 pour l'anneau R' ;
2. soit $m' \in \mathcal{M}(R')$ le point associé à ce triplet par la proposition 7.1. Alors, après changement de base à K' , les points m' et m deviennent isomorphes.

Démonstration. — Pour l'assertion 1, il s'agit de vérifier que le triplet $(Y, (h_v)_{v \in V}, t)$ satisfait les conditions suivantes :

- $Y \in \mathfrak{g}(R'[C^V])$;
- pour tout $v \in V$, l'élément $h_v \in G((z_v))(R')$ et vérifie

$$\text{Ad}(h_v^{-1})Y \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](R') ;$$

- t est un élément de $\mathfrak{t}^{\text{reg}}(R')$ dont la caractéristique $\chi(t)$ est égale à la réduction modulo z_∞ de $\chi_G(Y)$.

La première condition et la relation $h_v \in G((z_v))(R')$ résultent de la définition de j . On a donc

$$\text{Ad}(h_v^{-1})Y \in \mathfrak{g}((z_v))(R').$$

En fait, on peut remplacer dans la relation précédente $\mathfrak{g}((z_v))$ par $\mathfrak{g}[[z_v]]$ car on a d'une part

$$\text{Ad}(h_v^{-1})Y = \text{Ad}(z_j)(\text{Ad}(g_v^{-1})X)$$

et d'autre part

$$\text{Ad}(g_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](R).$$

De même, la troisième relation est vérifiée puisque X et Y , étant conjugués, ont même caractéristique que cette relation vaut X .

Pour l'assertion 2 du lemme, on remarque qu'on a $z_j \in G(K')$ et on conclut à l'aide du corollaire 7.2. \square

Lemme 8.14. — *On poursuit avec les notations du lemme 8.13. Soit $m'_\kappa \in \mathcal{M}(\kappa)$ le point déduit de m' par le changement de base $\text{Spec}(\kappa) \rightarrow \text{Spec}(R)$. On a alors les assertions suivantes :*

1. $f(m') \in \mathcal{A}_{L, \text{el}}(\kappa)$;
2. pour tout $P \in \mathcal{F}(L)$ et toute réduction $m'_{\kappa, P}$ de m'_κ à P , on a

$$\deg(m'_{\kappa, P}) = H_P((\bar{h}_v)_{v \in V})$$

où $\bar{h}_v \in G((z_v))(\kappa)$ est la réduction modulo $\pi^{\frac{1}{r}}$ de h_v ;

3. pour tout $P \in \mathcal{F}(L)$ tel que $P \subset Q$ soit $m_{\kappa, P}$ une réduction de m_κ à P et $m'_{\kappa, P-}$ une réduction de m'_κ à $P^- = (M_Q \cap P)N_{Q-}$; on a l'égalité

$$\deg(m'_{\kappa, P-}) = \deg(m_{\kappa, P})$$

Démonstration. — Le triplet $(\bar{Y}, (\bar{h}_v)_{v \in V}, \bar{t})$ est la réduction modulo $\pi^{\frac{1}{r}}$ du triplet $(Y, (h_v)_{v \in V}, t)$. Par conséquent, le point m'_κ se déduit du triplet $(\bar{Y}, (\bar{h}_v)_{v \in V}, \bar{t})$ par la bijection de la proposition 7.1. L'inégalité (8.18) implique que \bar{Y} est égal à \bar{X} défini en (8.5). Il s'ensuit que $f(m'_\kappa) = f(m_\kappa)$ et ce point appartient à $\mathcal{A}_{L, \text{ell}}(\kappa)$ (cf. §8.8) d'où l'assertion 1. Rappelons que $\bar{X} \in \mathcal{I}(\kappa[C^V])$ est conjugué à \bar{t}_a par $\bar{g}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$ (cf. assertion 2 et 3 du lemme 8.4). L'assertion 2 résulte alors du corollaire 7.5.

Prouvons l'assertion 3. Soit $P \in \mathcal{F}(L)$ tel que $P \subset Q$. Soit $P^- \in \mathcal{F}(L)$ défini par $P^- = (M_Q \cap P)N_{Q^-}$. On a donc $P^- \subset Q^-$. De l'égalité (8.21) et du fait que l'inégalité (8.22) est stricte pour $\alpha \in \Phi^+$ on déduit

$$\bar{h}_v \in N_{Q^-}((z_v))(\kappa)\bar{x}_v$$

et

$$\deg(m'_{\kappa, P^-}) = H_{P^-}((\bar{h}_v)_{v \in V}) = H_{P^- \cap M_Q}((\bar{x}_v)_{v \in V}).$$

Mais l'égalité (8.20) implique aussi qu'on a

$$\deg(m_{\kappa, P}) = H_P((\bar{g}_v)_{v \in V}) = H_{P \cap M_Q}((\bar{x}_v)_{v \in V}).$$

Comme $P \cap M_Q = P^- \cap M_Q$, on a bien

$$\deg(m'_{\kappa, P^-}) = \deg(m_{\kappa, P})$$

□

D'après les notations du paragraphe 8.8 et les équivalences de la proposition 6.11, ϱ est le ξ -point de Harder-Narasimhan de m_κ et Q_0 est le sous-groupe parabolique de $\mathcal{F}(L)$ qui vérifie

(A) $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_{Q_0}^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$;

(B) La projection de ϱ sur \mathfrak{a}_L^G appartient à la projection sur \mathfrak{a}_L^G de l'enveloppe convexe des points $-\deg(m_{\kappa, P})$ pour $P \in \mathcal{P}(L)$ tel que $P \subset Q_0$ et $m_{\kappa, P}$ une réduction de m_κ à P .

L'assertion (B) ci-dessus et l'assertion 3 du lemme 8.14 montrent que la projection de ϱ sur \mathfrak{a}_L^G appartient à la projection sur \mathfrak{a}_L^G de l'enveloppe convexe des points $-\deg(m'_{\kappa, P^-})$ pour $P \in \mathcal{F}^{Q_0}(L)$ (avec les notations du lemme 8.14). La proposition 5.8 implique alors que le point ϱ appartient au convexe $\bar{\mathcal{C}}_{m'_\kappa}$ associé à m'_κ .

Il s'ensuit qu'on a l'inégalité suivante sur les distance

$$d(\bar{\mathcal{C}}_{m'_\kappa}, \xi) \leq d(\varrho_{m_\kappa}, \xi) = d(\bar{\mathcal{C}}_{m_\kappa}, \xi) = d.$$

Mais par définition de d (cf. §8.7) on a nécessairement égalité dans l'inégalité ci-dessus. Donc ϱ est aussi le ξ -point de Harder-Narasimhan de m'_κ . Comme $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_{Q_0}^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$, le sous-groupe parabolique qui vérifie l'assertion 2 de la proposition 6.11 pour m'_κ est nécessairement Q_0 . La projection de ϱ sur \mathfrak{a}_L^G est donc égale à la projection sur \mathfrak{a}_L^G de l'enveloppe convexe des points $-\deg(m'_{\kappa, P})$ associés aux réductions $m'_{\kappa, P}$ de m'_κ aux sous-groupes $P \in \mathcal{P}(M)$ tels que $P \subset Q_0$. En particulier, la projection de ϱ sur la droite \mathfrak{a}_Q^G égale au point $-\deg(m'_{\kappa, Q})$ où $m'_{\kappa, Q}$ est une réduction de m'_κ à Q (on a $\mathfrak{a}_G = \{0\}$ puisque G est semi-simple). L'assertion (B) implique par ailleurs que cette projection est égale à $-\deg(m_{\kappa, Q})$. On a donc

$$\deg(m'_{\kappa, Q}) = \deg(m_{\kappa, Q})$$

ce qui, combiné avec l'assertion 3 du lemme 8.14 donne

$$\deg(m'_{\kappa, Q}) = \deg(m'_{\kappa, Q^-}).$$

ou de manière équivalente par l'assertion 2 du lemme 8.14

$$(8.23) \quad H_{Q^-}((\bar{h}_v)_{v \in V}) = H_Q((\bar{h}_v)_{v \in V}).$$

Le lemme 8.15 ci-dessous implique alors que pour tout $v \in V$, on a

$$(8.24) \quad \bar{h}_v \in M_Q((z_v))(\kappa)G[[z_v]](\kappa)$$

Considérons d'abord le point $v = \infty_\kappa$. Par la condition 3 qui définit une trivialisatation admissible, on a $\text{Ad}(g_\infty^{-1})X = t_a$, d'où l'on tire

$$\text{Ad}(h_\infty^{-1})Y = t_a.$$

L'inégalité (8.18) implique qu'on a $\bar{Y} = \bar{X}$. En réduisant modulo $\pi^{\frac{1}{r}}$ l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\text{Ad}(\bar{h}_\infty^{-1})\bar{X} = \bar{t}_a.$$

Mais \bar{X} et \bar{t}_a sont conjugués par $\bar{g}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$ (cf. assertion 3 du lemme 8.4. On a donc aussi $\bar{h}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$. Par conséquent l'inégalité (8.22) est stricte pour $v = \infty_\kappa$ et pour tout $\alpha \in \Phi^\pm$.

Supposons désormais $v \neq \infty_\kappa$. Supposons aussi qu'il existe $\alpha \in \Phi^-$ tel que l'inégalité (8.22) soit une égalité c'est-à-dire qu'on ait

$$(8.25) \quad \frac{j\alpha(\lambda)}{r} + \text{val}_\pi(b_{\alpha,v}) = 0.$$

Soit i le plus entier tel qu'il existe $\alpha \in \Phi_i^-$ qui vérifie l'égalité (8.25). On a donc

$$(8.26) \quad \bar{h}_v \in \bar{x}_v N_i((z_v))(\kappa).$$

En comparant avec (8.24), on en déduit que

$$(8.27) \quad \bar{h}_v \in \bar{x}_v N_i[[z_v]](\kappa).$$

Pour tout $\alpha \in \Phi_i^-$ soit $u_\alpha \in \kappa[[z_v]]$ et

$$n = \prod_{\alpha \in \Phi_i^-} \zeta_\alpha(u_\alpha).$$

tel qu'on ait

$$\bar{h}_v n \in \bar{x}_v N_{i+1}[[z_v]](\kappa).$$

Soit $n' = z_j^{-1} n z_j$. On a donc

$$n' = \zeta_\alpha(\pi^{\frac{ij}{r}} u_\alpha).$$

L'égalité (8.25) implique que $\frac{ij}{r}$ est un entier strictement positif. Par conséquent, n' appartient à $N_Q((z_v))(R)$ et sa réduction modulo π est triviale. Quitte à remplacer g_v par $g_v n'$, on voit qu'on est ramené au cas où l'on a

$$\bar{h}_v \in \bar{x}_v N_{i+1}[[z_v]](\kappa)$$

et par récurrence au cas où $\bar{h}_v = \bar{x}_v$. Mais, dans ce cas, l'inégalité (8.22) est stricte pour tout $\lambda \in \Phi^\pm$. Cela termine la démonstration du lemme 8.12. \square

Soit $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$ une trivialisatation admissible de m qui vérifie les conditions du lemme 8.12. Soit $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ le triplet qui s'en déduit. Soit

$$j_1 = \min \left(\min_{\alpha \in \Phi^-} \left(-\frac{r}{\alpha(\lambda)} \text{val}_\pi(X_\alpha) \right), \min_{v \in V, \alpha \in \Phi^-} \left(-\frac{r}{\alpha(\lambda)} \text{val}_\pi(b_{\alpha,v}) \right) \right).$$

C'est un entier qui vérifie $j_1 > j$,

$$\text{Ad}(z_{j_1})X \in \mathfrak{g}(R[C^V])$$

et pour tout $v \in V$

$$z_{j_1} g_v z_{j_1}^{-1} \in G((z_v))(R).$$

C'est visiblement la contradiction recherchée et cela achève la démonstration de la proposition 8.10. \square

Le lemme suivant a été utilisé dans la preuve précédente (preuve de la proposition 8.10).

Lemme 8.15. — Soit $Q \in \mathcal{F}^G$ un sous-groupe parabolique de G et Q^- son parabolique opposé. Pour tout $v \in V$, soit $g_v \in G((z_v))(\kappa)$. L'égalité

$$(8.28) \quad H_Q((g_v)_{v \in V}) = H_{Q^-}((g_v)_{v \in V})$$

entraîne que pour tout $v \in V$, il existe $x_v \in M_Q((z_v))(\kappa)$ et $k_v \in G[[z_v]](\kappa)$ tels que

$$g_v = x_v k_v$$

Démonstration. — Traitons d'abord le cas où $V = \{v\}$ est un singleton. Pour alléger les notations, on omet l'indice v . Soit $g \in G((z))(\kappa)$. On va montrer que $-H_Q(g) + H_{Q^-}(g)$ est une somme à coefficients positifs de coracines α^\vee dans Δ_Q^\vee et que cette somme est nulle si et seulement si il existe $m \in M_Q((z))(\kappa)$ et $k \in G[[z]](\kappa)$ tels que $g = mk$. En utilisant la décomposition d'Iwasawa $x = mnk$ avec $m \in M_Q((z))(\kappa)$, $n \in N_Q((z))(\kappa)$ et $k \in G[[z]](\kappa)$, on voit qu'on se ramène à montrer l'assertion suivante : pour tout $x \in N_Q((z))(\kappa)$ on a

$$H_{Q^-}(x) \geq 0$$

et $H_{Q^-}(x) = 0$ implique que x appartient à $N_Q[[z]](\kappa)$. Pour toute racine α de T dans G soit ζ_α un isomorphisme de \mathbb{G}_a sur le groupe radiciel correspondant à la racine α . Soit $x \in N_Q((z))(\kappa)$. Il existe une famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de racines de T dans N_Q deux à deux distinctes et des éléments $x_i \in \kappa((z))$ tels que

$$x = \prod_{i=1}^n \zeta_{\alpha_i}(x_i) = \zeta_{\alpha_1}(x_1) \dots \zeta_{\alpha_n}(x_n).$$

Si x appartient à $N_Q[[z]](\kappa)$ on a $H_{Q^-}(x) = 0$. Supposons que x n'appartient pas à $N_Q[[z]](\kappa)$. Il existe donc i tel que $\text{val}(x_i) < 0$. Quitte à traduire x à droite par un élément de $N_Q[[z]](\kappa)$, ce qui ne modifie pas la valeur de $H_{Q^-}(x)$, on peut supposer $\text{val}(x_n) < 0$. Pour toute racine α et tout $a \in \kappa((z))$ de valuation strictement négative, on vérifie l'assertion suivante

$$\zeta_\alpha(a) \in \alpha^\vee(a) \zeta_{-\alpha}(a) G[[z]](\kappa).$$

En utilisant cette relation pour α_n et x_n , on voit que pour tout $1 \leq i \leq n-1$, il existe $x'_i \in \kappa((z))$ tel que

$$H_{Q^-}(x) = H_{Q^-}(\alpha^\vee(x_n) \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_{\alpha_i}(x'_i)).$$

En raisonnant par récurrence, on voit qu'il existe un entier $1 \leq n' \leq n$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n'$ il existe

- un élément $y_i \in \kappa((z))$ tel que $\text{val}(y_i) < 0$;
- une racine β_i de T dans N_Q

tels que

$$H_{Q^-}(x) = H_{Q^-}(\prod_{i=1}^{n'} \beta_i^\vee(y_i)).$$

Soit γ_i la projection de β_i sur \mathfrak{a}_Q : c'est un vecteur non nul. On obtient donc

$$H_{Q^-}(x) = - \sum_{i=1}^{n'} \text{val}(y_i) \gamma_i^\vee$$

ce qui montre que $H_{Q^-}(x)$ est une combinaison à coefficients positifs d'éléments de Δ_Q et même strictement positifs. Donc $H_{Q^-}(x)$ est non nul. Cela conclut la preuve lorsque V est un singleton.

Revenons au cas général d'un ensemble V fini non vide. On vient de voir que pour tout $v \in V$, la différence $-H_Q(g_v) + H_{Q^-}(g_v)$ est une combinaison à coefficients positifs d'éléments de Δ_Q . Il s'ensuit que l'égalité (8.28) est vraie si et seulement si pour tout $v \in V$

$$H_Q(g_v) = H_{Q^-}(g_v).$$

On est donc ramené au cas du singleton. \square

8.17. Où l'on obtient la contradiction cherchée. — Pour tout entier n , soit

$$R_n = R/\pi^n R.$$

Soit n un entier ≥ 1 . Soit $(\beta_R, \alpha_{R,v})$ une trivialisatation admissible de m qui vérifie

$$(8.29) \quad j(\beta_R, \alpha_{R,v}) \geq n,$$

(cf. proposition 8.10. Soit $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$ le triplet associé à m et à cette trivialisatation par la proposition 7.1. Soit $(X_n, (g_{n,v})_{v \in V}, t_n)$ le triplet qui s'en déduit par réduction modulo π^n . Ce triplet vérifie les conditions suivantes :

1. $X_n \in \mathfrak{q}(R_n[C^V])$;
2. pour tout $v \in V$, $g_{n,v} \in Q((z_v))(R_n)$;
3. $\text{Ad}(g_{n,\infty})^{-1}X_n = t_{a,n}$ où $t_{a,n}$ est la réduction modulo π^n de t_a .

De ce triplet, on déduit, par la proposition 7.1 appliquée au groupe Q , un triplet $m_{Q,n} = (\mathcal{E}_{Q,n}, \theta_{Q,n}, t_n)$ formé d'un Q -torseur $\mathcal{E}_{Q,n}$ sur

$$C_n = C \times_k R_n,$$

d'une section $\theta_{Q,n}$ de $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_{Q,n})$ tel que $\chi_Q(\theta_{Q,n}(\infty_{R_n})) = \chi_Q(t_n)$. En outre, ce triplet est une réduction à Q du point $m_n \in \mathcal{M}(R_n)$ obtenu par changement de base à R_n .

L'algorithme utilisée dans la preuve de la proposition 8.10 consiste à conjuguer X (et translater à droite g_v en conséquence), resp. translater à gauche g_v , par des éléments de la forme $\zeta_\alpha(u_\alpha)$ où u_α est un élément de $R[C^V]$, resp. de $R((z_v))$, de valuation π -adique $\geq n$ de façon à obtenir un triplet $(X', (g'_v)_{v \in V}, t)$ associée à une trivialisatation admissible dont le j associé est plus grand que $n + 1$. En particulier la réduction modulo π^n de $(X', (g'_v)_{v \in V}, t)$ est égale à $(X_n, (g_{n,v})_{v \in V}, t_n)$. Soit $(X_{n+1}, (g_{n+1,v})_{v \in V}, t_{n+1})$ la réduction modulo π^{n+1} de $(X', (g'_v)_{v \in V}, t)$. Soit $m_{Q,n+1} = (\mathcal{E}_{Q,n+1}, \theta_{Q,n+1}, t_{n+1})$ la réduction à Q de $m_{n+1} \in \mathcal{M}(R_{n+1})$ qui s'en déduit comme plus haut. Le changement de base de $m_{Q,n+1}$ à C_n redonne $m_{Q,n}$.

Par récurrence, on obtient pour tout entier n une réduction $m_{Q,n} = (\mathcal{E}_{Q,n}, \theta_{Q,n}, t_n)$ à Q du point $m_n = (\mathcal{E}_n, \theta_n, t_n) \in \mathcal{M}(R_n)$ déduit de $m \in \mathcal{M}(R)$ par changement de base telle que l'image de m_{n+1} dans $\mathcal{M}(R_n)$ soit isomorphe à m_n . Le morphisme Q -équivalent

$$\mathcal{E}_{Q,n} \rightarrow \mathcal{E}_{Q,n} \times_k^G Q \simeq \mathcal{E}_n$$

fournit par passage au quotient une section

$$\sigma_n : C_n \rightarrow \mathcal{E}_n/Q.$$

Lorsque n varie, les sections obtenues s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_n/Q & \longrightarrow & \mathcal{E}_{n+1}/Q \\ \sigma_n \uparrow & & \uparrow \sigma_{n+1} \\ C_n & \longrightarrow & C_{n+1} \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont les flèches canoniques de transition. Elles forment donc un système inductif $\hat{\sigma} = (\sigma_n)_{n \geq 1}$. Soit

$$\hat{C} = \varinjlim_n C_n$$

et

$$\widehat{\mathcal{E}/Q} = \varinjlim_n \mathcal{E}_n/Q.$$

Le système inductif $\hat{\sigma}$ donne un élément, encore noté $\hat{\sigma}$, de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spf}(R)}(\hat{C}, \widehat{\mathcal{E}/Q}).$$

Comme C_R est propre sur $\mathrm{Spec}(R)$ et que \mathcal{E}/Q est séparé et de type fini sur $\mathrm{Spec}(R)$, on sait, d'après le théorème d'algébrisation des morphismes de Grothendieck (théorème 5.4.1 de [17]), que l'application de prolongement aux complétés

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(R)}(C_R, \mathcal{E}/Q) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spf}(R)}(\hat{C}, \widehat{\mathcal{E}/Q})$$

est une bijection. Il existe donc $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(R)}(C_R, \mathcal{E}/Q)$ qui s'envoie sur $\hat{\sigma}$ par la bijection ci-dessus. En utilisant de nouveau le théorème d'algébrisation, on voit que σ est en fait une section de \mathcal{E}/Q . Soit \mathcal{E}_Q le Q -torseur au-dessus de C_R défini par

$$\mathcal{E}_Q = C_R \times_{\sigma, \mathcal{E}/Q} \mathcal{E}.$$

Par construction, \mathcal{E}_Q est une réduction de \mathcal{E} à Q .

Soit

$$\widehat{\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)} = \varinjlim_n \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_{Q,n}).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, la section θ_n de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_n)$ se factorise par la section $\theta_{Q,n}$ de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_{Q,n})$. Par construction, les sections θ_n forment un système inductif et donc un élément noté de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spf}(R)}(\hat{C}, \widehat{\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)}).$$

Par le théorème d'algébrisation déjà cité, on en déduit que θ se factorise par une section θ_Q de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)$.

Par construction, la réduction modulo π^n de $\chi_Q(\theta_Q)(\infty_R)$ est égale à $\chi_Q(\theta_{Q,n})(\infty_{R_n}) = \chi_Q(t_n)$. Il s'ensuit qu'on a

$$\chi_Q(\theta_Q)(\infty_R) = \chi_Q(t).$$

Par conséquent le triplet $m_Q = (\mathcal{E}_Q, \theta_Q, t)$ est une réduction de m à Q . Soit $m_{Q,K}$ et $m_{Q,\kappa}$ les réductions à Q de m_K et m_κ qui s'en déduisent par changement de base. Par platitude de \mathcal{E}_Q sur C_R , on a

$$\deg(m_{Q,K}) = \deg(m_{Q,\kappa}).$$

Or m_K est ξ -semi-stable : on a donc

$$\xi \in -\deg(m_{Q,K}) - \overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q.$$

Au paragraphe 8.8, on a introduit le sous-groupe parabolique $Q_0 \subset Q$ qui vérifie $\xi - \rho \in \mathfrak{a}_{Q_0}^+$ et $\varrho \in -\deg(m_{Q_0,\kappa}) + \mathfrak{a}_T^{Q_0}$. On a donc

$$\xi \in -\deg(m_{Q_0,\kappa}) + \mathfrak{a}_{Q_0}^+ + \mathfrak{a}_T^{Q_0}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\xi \in (-\deg(m_{Q,K}) - \overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q) \cap (-\deg(m_{Q_0,\kappa}) + \mathfrak{a}_{Q_0}^+ + \mathfrak{a}_T^{Q_0}).$$

De l'égalité $\deg(m_{Q,K}) = \deg(m_{Q,\kappa})$, on tire $(-\overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q) \cap (\mathfrak{a}_{Q_0}^+ + \mathfrak{a}_T^{Q_0}) \neq \emptyset$. En projetant sur \mathfrak{a}_Q , on trouve $-\overline{+\mathfrak{a}_Q} \cap \mathfrak{a}_Q^+ \neq \emptyset$ ce qui n'est pas : c'est la contradiction cherchée (cf. fin du §8.7).

9 Séparation du morphisme f^ξ

9.1. Le but de cette section est de prouver le théorème suivant.

Théorème 9.1. — *Supposons G semi-simple. Pour tout $\xi \in \mathfrak{a}_T$, le morphisme*

$$f^\xi : \mathcal{M}^\xi \rightarrow \mathcal{A}$$

est séparé.

Remarque. — L'énoncé et la démonstration du théorème 9.1 s'inspirent d'un théorème de Langton (cf. [23], §3 théorème). Faltings a donné une preuve du théorème 9.1 pour $\xi = 0$ et lorsque le corps de base est de caractéristique nulle (cf. [16] théorème II.4).

Dans toute la suite, on suppose G semi-simple. D'après le critère valuatif de séparation, il est équivalent de prouver l'énoncé suivant.

Proposition 9.2. — *Soit κ une extension de k algébriquement close. Soit R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K et de corps résiduel κ . Soit m et m' deux éléments de $\mathcal{M}^\xi(R)$ et m_K et m'_K les éléments de $\mathcal{M}^\xi(K)$ qui s'en déduisent par changement de base. Supposons que ces objets satisfont les deux conditions suivantes :*

- $f^\xi(m) = f^\xi(m')$;
- *il existe un isomorphisme $\phi_K : m'_K \rightarrow m_K$.*

Alors il existe un unique isomorphisme $\phi : m' \rightarrow m$ qui prolonge ϕ_K .

9.2. Où l'on se ramène à un problème sur un trait. — Dans toute la suite, soit deux triplets $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$ et $m' = (\mathcal{E}', \theta', t)$ dans $\mathcal{M}^\xi(R)$ tels que $f^\xi(m) = f^\xi(m')$. Soit $m_K = (\mathcal{E}_K, \theta_K, t)$ et $m'_K = (\mathcal{E}'_K, \theta'_K, t)$ les triplets de $\mathcal{M}^\xi(K)$ qui s'en déduisent par changement de base. Soit $\phi_K : m'_K \rightarrow m_K$ un isomorphisme. On note encore ϕ_K l'isomorphisme G -équivariant sous-jacent

$$\phi_K : \mathcal{E}'_K \rightarrow \mathcal{E}_K.$$

L'isomorphisme qui s'en déduit

$$\mathrm{Ad}_D(\phi_K) : \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}'_K) \rightarrow \mathrm{Ad}(\mathcal{E}_K)$$

envoie θ'_K sur θ_K . On cherche à prolonger ϕ_K en un isomorphisme G -équivariant

$$\phi : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$$

de sorte que l'isomorphisme qui s'en déduit

$$\mathrm{Ad}_D(\phi) : \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}) \rightarrow \mathrm{Ad}(\mathcal{E})$$

envoie θ' sur θ . Soit π une uniformisante de R et B l'anneau local de C_R en le point de codimension 1 défini par l'idéal (π) . C'est donc un anneau de valuation discrète de corps résiduel le corps des fonctions $\kappa(C)$ de la courbe C_κ et de corps des fractions le corps des fonctions F de la courbe C_K .

Lemme 9.3. — *Pour que ϕ_K se prolonge à $C_R = C \times_k R$ il faut et il suffit qu'il se prolonge à $\mathrm{Spec}(B)$. De plus, de tels prolongements, s'ils existent, sont uniques.*

Démonstration. — Un isomorphisme G -équivariant de \mathcal{E}' sur \mathcal{E} n'est autre qu'une section globale du C_R -schéma

$$\mathrm{Isom}_G(\mathcal{E}', \mathcal{E}) = (\mathcal{E}' \times_{C_R} \mathcal{E})/G$$

où G agit diagonalement à droite sur $\mathcal{E}' \times_{C_R} \mathcal{E}$. L'isomorphisme ϕ_K définit une section σ_K de $\mathrm{Isom}_G(\mathcal{E}', \mathcal{E})$ au-dessus de C_K . Tout prolongement de cette section à C_R est nécessairement unique, d'où l'unicité de l'énoncé. Supposons que ϕ_K se prolonge à $\mathrm{Spec}(B)$. La section σ_K se prolonge donc à $\mathrm{Spec}(B)$ et par suite à un ouvert de C_R qui contient tous les points de codimension ≤ 1 .

Comme $\text{Isom}_G(\mathcal{E}', \mathcal{E})$ est affine sur C_R — c'est même un torseur sous $\text{Aut}_G(\mathcal{E})$ —, une telle section se prolonge automatiquement à C_R (cf. [18] corollaire 20.4.12). \square

Notons que si ϕ_K se prolonge en un isomorphisme ϕ , l'isomorphisme $\text{Ad}_D(\phi)$ envoie nécessairement θ' sur θ puisque les sections $\text{Ad}_D(\phi)(\theta')$ et θ , qui coïncident sur un ouvert de C_R , sont en fait égales.

9.3. Étude sur le trait $\text{Spec}(B)$ — Pour toute extension K' finie de K soit R' la clôture intégrale de R dans K' . Soit F' le corps des fonctions de la courbe relative $C_{R'} = C \times_k R'$ et B' la clôture intégrale de B dans F' . Dans la démonstration du lemme 9.3, on a vu que ϕ_K s'interprète comme une section du C_R -schéma affine $\text{Isom}_G(\mathcal{E}', \mathcal{E})$ et que prolonger ϕ_K revient à prolonger cette section à $\text{Spec}(B)$. Comme B est normal, ϕ_K se prolonge à $\text{Spec}(B)$ si et seulement si le changement de base de ϕ_K à K' se prolonge à B' . Dans la suite, on pourra toujours, s'il le faut, remplacer K par K' .

Soit $(a, t) \in \mathcal{A}_G(R)$ défini par $(a, t) = f^\xi(m)$. Soit $t_a \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}[[z_\infty]](R)$ l'unique élément dont la caractéristique est la restriction de a à $\text{Spec}(R[[z_\infty]])$ et dont la réduction modulo z_∞ est t .

Soit $M \subset L$ les deux sous-groupes de Levi dans \mathcal{L} tels que (a, t) appartienne en fibre générique à $\chi_G^L(\mathcal{A}_{L, \text{ell}}(K))$ et à $\chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(\kappa))$ en fibre spéciale (cf. proposition 3.4). Soit $(a_L, t) \in \mathcal{A}_L(R)$ l'unique point tel que $(a, t) = \chi_G^L((a_L, t))$ (cf. proposition 3.2).

Lemme 9.4. — *Quitte à remplacer K par une extension finie K' assez grande et R par R' , on est dans la situation suivante*

1. *Il existe un point $X \in \mathfrak{l}(B)$ qui vérifie*
 - (a) $\chi_L(X)$ coïncide avec a_L sur $\text{Spec}(B)$;
 - (b) la réduction \bar{X} de X modulo π appartient à $\mathfrak{m}(\kappa(C))$ et est conjugué à la réduction modulo π de t_a par un élément de $M((z_\infty)(\kappa))$;
2. *Il existe des trivialisations des G -torseurs \mathcal{E} et \mathcal{E}' sur $\text{Spec}(B)$ tels que les trivialisations de $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$ et $\text{Ad}_D(\mathcal{E}')$ qui s'en déduisent envoient θ et θ' sur X .*

Démonstration. — La section de Kostant montre qu'un point $X \in \mathfrak{l}(B)$ qui vérifie 1.(a) existe. Par la proposition 3.8 et le lemme 3.6, on peut supposer que, quitte à conjuguer X par un élément de $L(\kappa(C))$, l'assertion 1.(b) est aussi vérifiée.

Si l'extension K' est assez grande les toreseurs \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont triviaux sur $\text{Spec}(B')$ (théorème 2 de [14]). Quitte à remplacer R par R' , on peut supposer que les toreseurs \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont triviaux sur $\text{Spec}(B)$ et même, d'après le lemme 9.5ci-dessous qu'il existe des trivialisations qui vérifient l'assertion 2. \square

Lemme 9.5. — *Soit $a \in \text{car}^{\text{reg}}(B)$. Soit X et Y deux éléments de $\mathfrak{g}(B)$ tels que*

$$\chi_G(X) = \chi_G(Y).$$

Il existe une extension finie K' de K telle que X et Y sont conjugués par un élément de $G(B')$, où B' est la clôture intégrale de B dans le corps des fonctions de $C_{K'}$.

Démonstration. — Pour tout B -anneau A soit

$$\mathcal{T}(A) = \{g \in G(A) \mid \text{Ad}(g)X = Y\}.$$

Rappelons que B a pour corps des fractions le corps F des fonctions de C_K et pour corps résiduel le corps de fonctions $\kappa(C)$ de C_K . D'après le lemme 3.6, l'ensemble $\mathcal{T}(\kappa(C))$ est non vide et, quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer qu'il en est de même pour $\mathcal{T}(F)$. On en déduit que le foncteur \mathcal{T} est représenté par un torseur encore noté \mathcal{T} sous le schéma en groupes T_X qui centralise X . Or vu l'hypothèse de $a \in \text{car}^{\text{reg}}(B)$, ce schéma en groupes est un schéma en tores. Comme le torseur \mathcal{T} est trivial en fibre générique $\text{Spec}(F)$, il est trivial globalement (cf. par exemple [12] proposition 2.2). Il possède donc une section sur $\text{Spec}(B)$. \square

Désormais on fixe $X \in \mathfrak{g}(B)$ et des trivialisations de \mathcal{E} et \mathcal{E}' sur $\text{Spec}(B)$ qui vérifient les assertions du lemme 9.4. On obtient alors une trivialisation de ϕ_K qui s'identifie à la translation à gauche par un élément $\delta \in G(F)$ qui vérifie

$$\text{Ad}(\delta^{-1})X = X.$$

Il résulte du lemme 9.3 et des considérations ci-dessus qu'on a le lemme suivant.

Lemme 9.6. — *Le morphisme ϕ_K se prolonge si et seulement si $\delta \in G(B)$.*

Comme la restriction de a définit un élément de $\mathbf{car}^{\text{reg}}(B)$, la réduction modulo π de X est encore semi-simple régulière. Le centralisateur de X dans $G \times_k B$ est donc un schéma en tores sur B . Comme B est normal, on sait qu'un tel schéma en tores est isotrivial. Autrement dit, le tore $T_{X,F}$ se déploie sur une extension séparable et non ramifiée. On en déduit qu'il existe $\lambda \in X_*(T_X)$ et un élément $h \in T_X(F) \cap G(B)$ tel que

$$\delta = \lambda(\pi)h.$$

Comme $h \in G(B)$ centralise X , on peut composer la trivialisation de \mathcal{E} avec h sans que la condition 2 du lemme 9.4 soit affectée. Quitte à changer de trivialisation, on peut et on va supposer que $h = 1$. Notons que λ est nécessairement fixe sous $\text{Gal}(F_s/F)$. La caractéristique $\chi_L(X)$ est égale à la restriction de a_L à $\text{Spec}(B)$. Comme (a_L, t) définit en fibre générique un point de $\mathcal{A}_{L,\text{ell}}(K)$, le tore $T_{X,F}$ est un sous- F -tore elliptique de L (cf. corollaire 3.8 et lemme 3.6) ce qui se traduit par l'égalité

$$X_*(T_X)^{\text{Gal}(F_s/F)} = X_*(A_L)$$

où A_L est le centre connexe de L . Ainsi $\lambda \in X_*(A_L)$. Le lemme suivant, combiné au lemme 9.6, montre l'existence du prolongement de ϕ_K .

Lemme 9.7. — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a $\lambda = 0$.*

9.4. Preuve du lemme 9.7. — On continue avec les notations du paragraphe précédent. Notons tout d'abord que le lemme est évident si $L = G$ puisque dans ce cas $X_*(A_G) = 0$. Dans la suite, on suppose donc qu'on a $L \neq G$. On raisonne par l'absurde en supposant $\lambda \neq 0$ et on cherche une contradiction. Soit P , resp. \bar{P} , le sous-groupe parabolique dans $\mathcal{F}(L)$ défini par la condition suivante : les racines α de T dans P satisfont l'inégalité $\alpha(\lambda) \geq 0$, resp. $\alpha(\lambda) \leq 0$. Ces sous-groupes sont opposés au sens où l'intersection $P \cap \bar{P}$ un sous-groupe de Levi commun. On notera que cette intersection contient le sous-groupe de Levi M défini au §9.3 et que ces sous-groupes paraboliques sont propres puisque λ n'est pas nul. Soit r le plus grand entier $\alpha(\lambda)$ lorsque α parcourt l'ensemble Φ_T^G des racines de T dans G . Soit

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} \mathfrak{g}_\alpha$$

la décomposition de \mathfrak{g} en espaces propres pour l'action de T . Pour tout entier i qui vérifie $-r \leq i \leq r$, soit

$$\mathfrak{g}_i = \bigoplus_{\{\alpha \in X^*(T) \mid \alpha(\lambda)=i\}} \mathfrak{g}_\alpha$$

et

$$\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\{-r < i \leq r\}} \mathfrak{g}_i.$$

Les sous-espaces \mathfrak{g}_+ et \mathfrak{g}_r sont stables par P et \mathfrak{g}_{-r} est stable par \bar{P} .

L'inclusion

$$(9.1) \quad \pi^r \text{Ad}(\lambda(\pi))\mathfrak{g}(B) \subset \mathfrak{g}(B)$$

est une inclusion entre deux sous- B -modules de $\mathfrak{g}(F)$, libres et de rang maximal, qui fournissent chacun un prolongement à C_R du fibré vectoriel $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_K)$ sur C_K (cf. proposition 6 de [23]). L'un,

celui associé à $\mathfrak{g}(B)$, n'est autre que $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ et on note l'autre \mathcal{V} . Dans la suite, on note \mathcal{E}_κ et \mathcal{V}_κ le G -torseur et le fibré vectoriel sur $C_\kappa = C \times_k \kappa$ déduits de \mathcal{E} et \mathcal{V} par changement de base. On déduit de l'inclusion (9.1) un morphisme de fibrés vectoriels

$$(9.2) \quad \mathcal{V} \rightarrow \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}).$$

Soit \mathcal{W} et \mathcal{Q} le noyau et l'image du morphisme $\mathcal{V}_\kappa \rightarrow \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_\kappa)$. Notons que \mathcal{W} est localement facteur direct de \mathcal{V}_κ . Ce n'est pas le cas pour \mathcal{Q} qui est simplement un sous-faisceau localement libre de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_\kappa)$. On a

$$\deg(\mathcal{V}_\kappa) = 0.$$

En effet, par platitude on a $\deg(\mathcal{V}_\kappa) = \deg(\mathcal{V}_K)$ et d'autre part $\deg(\mathcal{V}_K) = \deg(\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_K)) = 0$. Comme $\deg(\mathcal{V}_\kappa) = 0$, on a

$$(9.3) \quad \deg(\mathcal{W}) = -\deg(\mathcal{Q})$$

Soit

$$\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}') \rightarrow \mathcal{V}$$

l'unique isomorphisme qui, en fibre générique, est le composé de l'isomorphisme

$$\mathrm{Ad}_D(\phi_K) : \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}'_K) \rightarrow \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_K)$$

par l'homothétie de rapport π^r et qui sur $\mathrm{Spec}(B)$ coïncide avec l'isomorphisme

$$\mathfrak{g}(B) \rightarrow \pi^r \mathrm{Ad}(\lambda(\pi))\mathfrak{g}(B)$$

donné par $\pi^r \mathrm{Ad}(\lambda(\pi))$. En composant cet isomorphisme avec le morphisme $\mathcal{V} \rightarrow \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ défini en (9.2), on obtient un morphisme de fibrés vectoriels sur C_R

$$(9.4) \quad \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}') \rightarrow \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}),$$

qui donne, en fibre spéciale, un morphisme

$$(9.5) \quad \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}'_\kappa) \rightarrow \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}_\kappa)$$

dont on note \mathcal{W}' le noyau. Par construction, on a $\mathcal{W}' \simeq \mathcal{W}$ et l'image de ce morphisme est le fibré vectoriel \mathcal{Q} . Vu (9.3), on a

$$(9.6) \quad \deg(\mathcal{W}') = -\deg(\mathcal{Q})$$

On a fixée au §9.3 des trivialisations de \mathcal{E} et \mathcal{E}' sur $\mathrm{Spec}(B)$ qui vérifient les assertions du lemme 9.4. Via ces choix, le sous-groupe parabolique P de G définit une réduction générique de \mathcal{E}'_κ à P qui s'étend automatiquement en une réduction notée $\mathcal{E}'_{P,\kappa}$ de \mathcal{E}'_κ à P sur C_κ . De même, on note $\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa}$ la réduction de \mathcal{E}_κ à \bar{P} qui prolonge la réduction générique donnée par $\bar{P} \subset G$.

Lemme 9.8. — *Avec les notations ci-dessus, on a*

1. une égalité $\mathcal{E}'_{P,\kappa} \times_k^{P,\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}_+ = \mathcal{W}'$;
2. une injection $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\bar{P},\kappa} \times_k^{\bar{P},\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}_{-r}$ entre fibrés vectoriels de même rang.

Démonstration. — Comme $\mathcal{E}'_{P,\kappa} \times_k^{P,\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}_+$ et \mathcal{W}' sont des sous-fibrés vectoriels de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}'_\kappa)$, il suffit de vérifier 1 au point générique de C_κ . De même, comme \mathcal{Q} et $\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa} \times_k^{\bar{P},\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}_{-r}$ sont des sous-faisceaux localement libres de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}'_\kappa)$ et que $\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa} \times_k^{\bar{P},\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}_{-r}$ est même localement facteur direct, il suffit de vérifier 2 au point générique de C_κ . Or, dans les trivialisations \mathcal{E} et \mathcal{E}' sur $\mathrm{Spec}(B)$ qu'on a fixée au §9.3, le morphisme (9.4) est le morphisme $\mathfrak{g}(B) \rightarrow \mathfrak{g}(B)$ donnée par $\pi^r \mathrm{Ad}(\lambda(\pi))$. En particulier, en réduction modulo π , ce morphisme est la projection de $\mathfrak{g}(\kappa(C))$ sur $\mathfrak{g}_{-r}(\kappa(C))$ de noyau $\mathfrak{g}_+(\kappa(C))$. Le lemme est alors clair. \square

Lemme 9.9. — Soit $\mu \in X^*(P)$ le déterminant de l'action adjointe de P sur \mathfrak{g}_+ . On a l'inégalité

$$(9.7) \quad \deg(\mu(\mathcal{E}'_{P,\kappa})) \geq \deg(\mu(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa})).$$

Remarque. — Le caractère μ est un plus haut poids dans la représentation de G sur $\wedge^{\dim(\mathfrak{g}_+)} \mathfrak{g}$. Il s'écrit donc dans la base $\hat{\Delta}_P$ avec des coefficients positifs dont l'un au moins est non nul.

Démonstration. — D'après l'assertion 1 du lemme 9.8, on a

$$\deg(\mathcal{W}') = \deg(\mathcal{E}'_{P,\kappa} \times_k^{P, \text{Ad}} \mathfrak{g}_+) = \deg(\mu(\mathcal{E}'_{P,\kappa})).$$

D'après l'assertion 2 du lemme 9.8, on a

$$\deg(\mathcal{Q}) \leq \deg(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa} \times_k^{\bar{P}, \text{Ad}} \mathfrak{g}_{-r}) = -\deg(\mu(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa})).$$

On peut alors conclure puisque $\deg(\mathcal{W}') = -\deg(\mathcal{Q})$ (cf. (9.6)). \square

On a défini au §9.3 un sous-groupe de Levi M . Comme P et \bar{P} contiennent tous deux M , il résulte de la proposition 4.4 et de sa démonstration que les torseurs $\mathcal{E}'_{P,\kappa}$ et $\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa}$ sont les premiers facteurs de triplets $m'_{P,\kappa}$ et $m_{\bar{P},\kappa}$ qui sont des réductions à P et \bar{P} de m'_κ et m_κ . Or, par hypothèse, ces triplets de Hitchin sont ξ -stables. On a donc, d'une part,

$$\xi \in -\deg(m'_{P,\kappa}) - {}^+ \mathfrak{a}_P + \mathfrak{a}_T^M$$

(rappelons que $\mathfrak{a}_G = \{0\}$ puisque G est semi-simple) d'où (cf. la remarque qui suit le lemme 9.9)

$$\mu(\xi) < -\mu(\deg(m'_{P,\kappa})) = -\deg(\mu(\mathcal{E}'_{P,\kappa}))$$

et d'autre part

$$\xi \in -\deg(m_{\bar{P},\kappa}) - {}^+ \mathfrak{a}_{\bar{P}} + \mathfrak{a}_T^M$$

ce qui implique l'inégalité

$$-\mu(\xi) < \mu(\deg(m_{\bar{P},\kappa})) = \deg(\mu(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa})).$$

On a donc

$$\deg(\mu(\mathcal{E}'_{P,\kappa})) < -\mu(\xi) < \deg(\mu(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa}))$$

ce qui contredit l'inégalité (9.7) du lemme 9.9. C'était la contradiction recherchée au début de ce paragraphe.

10 \mathcal{M}^ξ est un champ de Deligne-Mumford

10.1. L'objet de cette section est de prouver le théorème suivant.

Théorème 10.1. — Pour tout groupe semi-simple G et tout paramètre ξ en position générale (cf. définition 6.3), le champ \mathcal{M}_G^ξ est un champ de Deligne-Mumford.

La démonstration se trouve au paragraphe suivant.

10.2. On fixe un groupe semi-simple G et un paramètre ξ en position générale. Soit $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}^\xi(k)$ et $\text{Aut}_G(\mathcal{E}, \theta)$ le sous-schéma en groupes de $\text{Aut}_G(\mathcal{E})$ qui centralise θ . Le foncteur qui, à un k -schéma S , associe le groupe des sections sur $C \times_k S$ du schéma en groupes $\text{Aut}_G(\mathcal{E}, \theta) \times_k S$ est représenté par un schéma en groupes sur k . Il s'agit de voir que ce groupe est non ramifié, ou encore, par un critère différentiel, que son espace tangent sur k est trivial. Or cet espace tangent admet la description suivante : c'est l'espace des sections $\varphi \in H^0(C, \text{Ad}(\mathcal{E}))$ qui commutent à θ

c'est-à-dire telles que le crochet $[\theta, \varphi]$ est nul. La nullité de l'espace tangent résulte donc de la proposition suivante.

Proposition 10.2. — *Pour toute section $\varphi \in H^0(C, \text{Ad}(\mathcal{E}))$ telle que $[\theta, \varphi] = 0$ on a*

$$\varphi = 0.$$

Démonstration. — Soit φ comme ci-dessus. Notons que, par le lemme évident ci-dessous, la caractéristique de φ est constante.

Lemme 10.3. — *L'espace des sections $H^0(C, \text{car}_G)$ s'identifie à $\text{car}_G(k)$.*

Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que $f(\mathcal{E}, \theta, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(k))$ et F le corps de fonctions de la courbe C .

Lemme 10.4. — *Il existe une trivialisation générique de \mathcal{E} qui vérifie les deux assertions suivantes :*

1. *l'identification de $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$ avec $\mathfrak{g}(F)$ qui en résulte envoie θ sur un élément $X \in \mathfrak{m}(F)$ qui est semi-simple, G -régulier et elliptique dans M et qui vérifie l'assertion 1 de la définition 7.6 ;*
2. *l'identification de $\text{Ad}(\mathcal{E})$ avec $\mathfrak{g}(F)$ qui en résulte envoie φ sur un élément $Y \in \mathfrak{t}(k)$.*

Démonstration. — On a vu dans la preuve de la proposition 7.8 qu'il existe une trivialisation générique de \mathcal{E} qui vérifie l'assertion 1. Dans l'identification de $\text{Ad}(\mathcal{E})$ avec $\mathfrak{g}(F)$, la section φ s'envoie sur un élément de $\mathfrak{g}(F)$ noté Z . Comme Z commute à X et que le centralisateur de X dans \mathfrak{g} est inclus dans \mathfrak{m} , on en déduit que Z appartient à $\mathfrak{m}(F)$. La caractéristique $\chi_M(Z) \in \text{car}_M(F)$ s'envoie par χ_G^M sur la caractéristique de φ qui par le lemme précédent est un élément de $\text{car}_G(k)$. Il s'ensuit que $\chi_M(Z)$ appartient à $\text{car}_M(k)$ et qu'on peut trouver un élément $Y \in \mathfrak{t}(k)$ tel que $\chi_M(Y) = \chi_M(Z)$. Par une variante du lemme 3.6, on en déduit que Y et Z sont conjugués par un élément de $M(F)$. Le lemme est alors évident. \square

On fixe désormais une trivialisation générique de \mathcal{E} qui vérifie le lemme 10.4. Soit $X \in \mathfrak{m}(F)$ et $Y \in \mathfrak{t}(k)$ les éléments qui s'en déduisent. Soit L le centralisateur de Y dans G . On vérifie que L est un élément de $\mathcal{L}^G(T)$ qui contient M . Soit Q un sous-groupe parabolique de G de Levi L . On notera le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 10.5. — *Le morphisme $N_Q \rightarrow \mathfrak{n}_Q$ donné par $n \mapsto \text{Ad}(n^{-1})Y - Y$ est un isomorphisme.*

Soit V l'ensemble des points fermés de C . On reprend les notations de la section 7. On déduit de la trivialisation générique du torseur \mathcal{E} et de l'existence d'une trivialisation sur un voisinage formel de tout point $v \in V$ une famille $(g_v)_{v \in V}$ telle que

1. $g_v \in G((z_v))(k)/G[[z_v]](k)$ est trivial sauf pour un nombre fini de v ;
2. $\text{Ad}(g_v^{-1})Y \in \mathfrak{g}[[z_v]](k)$;
3. la projection de ξ sur \mathfrak{a}_M^G appartient à la projection sur \mathfrak{a}_M^G de l'enveloppe convexe des points

$$-H_P((g_v)_{v \in V}) = -\sum_{v \in V} H_P(g_v).$$

La condition 2 traduit le fait que φ est une section globale de $\text{Ad}(\mathcal{E})$ et la condition 3 la ξ -stabilité du triplet (\mathcal{E}, θ, t) (cf. condition (d) de la définition 7.6).

Lemme 10.6. — *Pour tout $v \in V$, la classe g_v se relève en un élément de $L((z_v))(k)$.*

Démonstration. — Soit Q un sous-groupe parabolique de G de Levi L . Par la décomposition d'Iwasawa, l'élément g_v se relève en un élément $l_v n_v$ avec $l_v \in L((z_v))(k)$ et $n_v \in N_Q((z_v))(k)$. Le fait que L centralise Y et la relation 1 ci-dessus entraînent alors qu'on a

$$\text{Ad}(n_v^{-1})Y \in \mathfrak{g}[[z_v]](k)$$

d'où

$$\mathrm{Ad}(n_v^{-1})Y - Y \in \mathfrak{n}_Q[[z_v]](k).$$

Par le lemme 10.5, on a alors $n_v \in N_Q[[z_v]](k)$. D'où le lemme. \square

Le lemme précédent implique que le triplet (\mathcal{E}, θ, t) possède une “réduction” au sous-groupe de Levi L . Il implique aussi que la projection sur \mathfrak{a}_L^G de l'enveloppe convexe de 3 ci-dessus est réduite à un point qui est nécessairement un point du réseau $X_*(L)$ défini au §5.1. La ξ -stabilité entraîne que la projection de ξ sur \mathfrak{a}_L^G appartient à ce réseau. Si $L \neq G$, cela contredit le fait que ξ soit en position générale. On a donc $L = G$ et $Y = 0$ d'où $\varphi = 0$. \square

11 Comptage des points rationnels dans une fibre

11.1. Le théorème principal. — Voici la situation qui va nous occuper jusqu'à la fin de cette section. Rappelons qu'on a fixé en §3.2 une courbe C sur k ainsi qu'un diviseur D et un point $\infty \in C(k)$. On suppose que C provient par changement de base d'une courbe C_0 sur \mathbb{F}_q . Soit τ l'automorphisme de Frobenius de k donné par $x \mapsto x^q$. On note encore τ l'automorphisme $1 \times \tau$ de $C = C_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$. On suppose que D et ∞ sont fixes sous τ .

Soit F le corps des fonctions de C . L'automorphisme τ de C induit un automorphisme de F encore noté τ dont l'ensemble des points fixes est précisément le corps F_0 de la courbe C_0 . Soit V , resp. V_0 , l'ensemble des points fermés de C , resp. C_0 . Pour tout $v_0 \in V_0$, soit F_{0,v_0} le complété de F_0 en v_0 ; on note simplement τ l'automorphisme $\tau \otimes 1$ de

$$F \otimes_{F_0} F_{0,v_0} = \prod_{v \in V, v|v_0} F_v$$

où F_v est le complété de F en v . On identifie F_v à $k((z_v))$ et F_{0,v_0} à $\mathbb{F}_q((z_{v_0}))$ par le choix d'uniformisantes. Soit \mathbb{A} l'anneau des adèles de F . Cet anneau est naturellement muni d'une action de τ pour laquelle le sous-anneau des points fixes sous τ s'identifie à l'anneau \mathbb{A}_0 des adèles de F_0 .

On suppose que le groupe G est *semi-simple* et que le couple (G, T) (cf. §2) provient d'un couple analogue (G_0, T_0) défini sur \mathbb{F}_q tel que le tore T_0 soit déployé sur \mathbb{F}_q . Dans ce cas, tous les sous-groupes de Levi ou paraboliques de G qui contiennent T proviennent d'objets analogues définis sur \mathbb{F}_q relatifs à (G_0, T_0) . On note encore τ l'automorphisme de $G = G_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$ donnée par $1 \times \tau$. On en déduit un automorphisme toujours noté τ des groupes de points de G à valeurs dans F , \mathbb{A} ou $F \otimes_{F_0} F_{0,v_0}$ pour tout $v_0 \in V_0$.

Comme le diviseur D sur C est fixe par τ , il se descend en un diviseur D_0 sur C_0 de la forme

$$\sum_{v \in V_0} d_v v.$$

Soit $\mathbf{1}_{D_0}$ la fonction sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A}_0)$ qui est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\prod_{v \in V_0} z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](\mathbb{F}_q).$$

Pour alléger un peu les notations, on pose

$$K = \prod_{v \in V_0} G[[z_v]](\mathbb{F}_q),$$

c'est un sous-groupe ouvert et compact de $G(\mathbb{A}_0)$. De plus, la fonction $\mathbf{1}_{D_0}$ est invariante sous l'action adjointe de K .

Pour tout $\delta \in M(F)$, soit τ_δ l'automorphisme de $G(F)$, resp. de $\mathfrak{g}(F)$, donné par $\mathrm{Int}(\delta) \circ \tau$, resp. $\mathrm{Ad}(\delta) \circ \tau$. Le groupe G muni de l'automorphisme τ_δ définit par descente un groupe noté G^δ sur \mathbb{F}_q .

L'automorphisme de Frobenius τ agit également sur les espaces \mathcal{A} et \mathcal{A}_M pour tout $M \in \mathcal{L}$. Soit $(a, t) \in \mathcal{A}(k)$ un élément fixe par τ . Il existe $M \in \mathcal{L}$ et $(a_M, t) \in \mathcal{A}_{M, \text{ell}}(k)$ tels que

$$(a, t) = \chi_G^M((a_M, t)).$$

D'après les propositions 3.2 et 3.4, de tels éléments existent et sont uniques : en particulier ils sont fixes sous τ .

Voici le principal théorème de cette section. Il exprime le nombre de points rationnels d'une fibre de $\overline{f^\xi}$ en termes d'intégrales orbitales pondérées d'Arthur.

Théorème 11.1. — *Soit ξ en position générale. Soit $M \in \mathcal{L}$ un sous-groupe de Levi, $(a_M, t) \in \mathcal{A}_{M, \text{ell}}(k)$ fixe par τ et $(a, t) = \chi_G^M((a_M, t))$. Le cardinal du groupoïde des points rationnels de la fibre de $\overline{f^\xi}$ en (a, t) est égal à*

$$\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))^{-1} \cdot \text{vol}(a, t) \cdot \sum_h \sum_X J_M^G(\text{Ad}(h^{-1})X, \mathbf{1}_{D_0})$$

où

– h parcourt l'ensemble des doubles classes

$$h \in M(F) \backslash M(\mathbb{A}) / M(\mathbb{A}_0)$$

qui vérifient

$$\delta = h\tau(h)^{-1} \in M(F) ;$$

– X parcourt un système de représentants de l'ensemble des classes de $M^\delta(F_0)$ -conjugaison dans l'ensemble

$$\{X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0) \mid \chi_M(X) = a_{M|_{\text{Spec}(F_0)}}\}$$

des $X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0)$ dont la caractéristique $\chi_M(X)$ est égale à la restriction de a_M à $\text{Spec}(F_0)$;

– $J_M^G(\text{Ad}(h^{-1})X, \mathbf{1}_{D_0})$ est l'intégrale orbitale pondérée d'Arthur définie au §11.11 l.(11.9) ;

– le volume $\text{vol}(a, t)$ est défini au §11.5 l.(11.6) ;

Remarque. — Les intégrales orbitales pondérées considérées ci-dessus dépendent de choix de mesures de Haar sur \mathfrak{a}_M (cf. §11.11) et sur certains tores (cf. §11.5). Comme ces choix interviennent aussi dans les facteurs $\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))$ et $\text{vol}(a, t)$, la somme qui apparaît dans le théorème 11.1 ne dépend d'aucun choix.

Avant d'entamer la démonstration du théorème 11.1 qui va nous occuper jusqu'à la fin de cette section, nous allons donner quelques rappels sur le cardinal d'un groupoïde quotient et sur ses points fixes sous un automorphisme.

11.2. Cardinal d'un groupoïde. — Soit \mathcal{X} un ensemble et G un groupe abstrait qui agit à gauche sur \mathcal{X} . Le cardinal du groupoïde quotient $[G \backslash \mathcal{X}]$ (cf. l(7.2) du §7.6) est l'élément $\text{card}([G \backslash \mathcal{X}]) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ défini par

$$\text{card}([G \backslash \mathcal{X}]) = \sum_{x \in G \backslash \mathcal{X}} \frac{1}{|\text{stab}_G(x)|}$$

où

– $G \backslash \mathcal{X}$ est (un système de représentants de) l'ensemble des orbites de \mathcal{X} sous G ;

– $\frac{1}{|\text{stab}_G(x)|}$ vaut 0 si le stabilisateur de x dans G est infini et l'inverse de son cardinal sinon.

11.3. Points fixes sous un automorphisme. — On continue avec les notations du paragraphe précédent. Soit τ un automorphisme de G . Soit une bijection de \mathcal{X} , encore notée τ , compatible à l'automorphisme de G au sens où l'on a

$$\tau(g.x) = \tau(g).\tau(x)$$

Par définition, le groupoïde des points fixes sous τ de $[G \backslash \mathcal{X}]$ est le groupoïde $[G \backslash \mathcal{X}^\tau]$ où

- \mathcal{X}^τ est l'ensemble des couples $(x, g) \in \mathcal{X} \times G$ tels que

$$g \cdot \tau(x) = x ;$$

- G agit à gauche sur \mathcal{X}^τ par

$$h \cdot (x, g) = (hx, hg\tau(h)^{-1}).$$

11.4. Première étape. — Dans la suite, on fixe $M \in \mathcal{L}$ et des couples (a_M, t) et (a, t) comme dans l'énoncé du théorème 11.1. Soit $\xi \in \mathfrak{a}_T$ un élément *quelconque*. La fibre du morphisme de Hitchin \overline{f}^ξ au-dessus de (a, t) s'identifie par la proposition 7.8 au groupoïde quotient $[M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^\xi]$ où l'ensemble $\mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$ est celui de la définition 7.6 du paragraphe 7.6. Nos hypothèses entraînent que τ induit une bijection de cet ensemble compatible à l'action de τ sur $M(F)$ (au sens du §11.3). On cherche une expression pour le nombre de points sur \mathbb{F}_q de cette fibre, c'est-à-dire le cardinal du groupoïde des points fixes sous τ de $[M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^\xi]$, en termes d'intégrales orbitales pondérées.

Suivant le paragraphe 11.3, on introduit l'ensemble $\mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi, \tau}$ formé des triplets $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$ tels que $(X, (g_v)_{v \in V}) \in \mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$ et $\delta \in M(F)$ vérifient les relations

$$(11.1) \quad \text{Ad}(\delta)\tau(X) = X$$

et

$$(11.2) \quad \delta\tau((g_v)_{v \in V}) = (g_v)_{v \in V}.$$

Le groupe $M(F)$ agit sur les deux premiers facteurs par l'action décrite au §7.6 et par τ -conjugaison sur le deuxième facteur (c'est-à-dire un élément $\gamma \in M(F)$ agit sur $\delta \in M(F)$ par $\gamma\delta\tau(\gamma)^{-1}$). La première étape du comptage consiste à décrire un système de représentants des orbites de $\mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi, \tau}$ sous l'action de $M(F)$. Pour cela, on introduit quelques notations supplémentaires.

Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, soit $\mathbf{1}_{M,g}$ la fonction sur \mathfrak{a}_M caractéristique de l'enveloppe convexe des points $-H_P(g)$ pour $P \in \mathcal{P}(M)$. La définition 7.4 du §7.5, appliquée au groupe M et à son sous-groupe parabolique $P = M$, donne un morphisme

$$H_M : M(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_M.$$

Soit ξ_M la projection de ξ sur \mathfrak{a}_T suivant la décomposition $\mathfrak{a}_T = \mathfrak{a}_M \oplus \mathfrak{a}_T^M$.

Lemme 11.2. — *Il existe une bijection entre l'ensemble $M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi, \tau}$ et l'ensemble des triplets*

$$(X, g, \delta = h\tau(h)^{-1})$$

qui vérifient les trois conditions suivantes

1. h parcourt l'ensemble des doubles classes

$$h \in M(F) \backslash M(\mathbb{A}) / M(\mathbb{A}_0)$$

qui vérifient

$$\delta = h\tau(h)^{-1} \in M(F) ;$$

2. X parcourt un système de représentants de l'ensemble des classes de $M^\delta(F_0)$ -conjugaison dans l'ensemble

$$\{X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0) \mid \chi_M(X) = a_{M|_{\text{Spec}(F_0)}}\}$$

des $X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0)$ dont la caractéristique $\chi_M(X)$ est égale à la restriction de a_M à $\text{Spec}(F_0)$;

3. g parcourt l'ensemble des doubles classes

$$\text{Int}(h^{-1})T_X(F_0) \backslash G(\mathbb{A}_0) / K,$$

(où $T_X \subset M^\delta$ est le centralisateur de X dans G^δ) qui vérifient les deux conditions

$$(a) \mathbf{1}_{D_0}(\mathrm{Ad}(g^{-1}) \mathrm{Ad}(h^{-1})X) = 1 ;$$

$$(b) \mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + H_M(h)) = 1.$$

De plus, dans cette bijection, le cardinal du stabilisateur dans $M(F)$ d'un élément de $M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}$ qui correspond au triplet $(X, g, h\tau(h)^{-1})$ est donné par le cardinal de l'ensemble fini

$$(\mathrm{Int}(h^{-1})T_X(F_0)) \cap gKg^{-1}.$$

Démonstration. — Partons d'un triplet $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$ dans $\mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}$. Rappelons que g_v désigne une classe dans $G((z_v))(k)/G[[z_v]](k)$. Soit un élément $g \in G(\mathbb{A})$ tel que pour tout v la composante en v relève g_v . Par la relation (11.2) ci-dessus, on a

$$g^{-1}\delta\tau(g) \in \prod_{v \in V} G[[z_v]](k).$$

Par le théorème de Lang (appliqué aux quotients (connexes) du k -groupe pro-algébrique $G[[z_v]]$), on sait qu'un tel élément s'écrit $x\tau(x^{-1})$ pour un certain $x \in \prod_{v \in V} G[[z_v]](k)$. Quitte à remplacer g par gx , on peut et on va supposer qu'on a

$$(11.3) \quad g^{-1}\delta\tau(g) = 1$$

autrement dit la classe de τ -conjugaison de δ dans $G(\mathbb{A})$ est triviale. Le lecteur vérifiera que cela implique que la classe de τ -conjugaison de δ dans $M(\mathbb{A})$ est triviale. Il existe donc $h \in M(\mathbb{A})$ tel que

$$\delta = h\tau(h)^{-1}.$$

Posons $g_0 = h^{-1}g$. Alors la relation (11.3) se traduit par

$$g_0 \in G(\mathbb{A}_0).$$

D'après la relation (11.1), l'élément X appartient à $\mathfrak{m}^\delta(F_0)$. Soit $t_a \in \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}[[z_\infty]](k)$ l'unique relèvement de t dont la caractéristique est a . De même, on peut définir un point t_{a_M} associé au couple (a_M, t) . Mais par unicité de t_a , on a $t_a = t_{a_M}$. Ainsi la caractéristique $\chi_M(t_a)$ est a_M . La condition 1. (bis) de la définition 7.7 entraîne que X est conjugué à t_a par un élément de $M((z_\infty))(k)$ d'où

$$\chi_M(X) = \chi_M(t_a) = a_M.$$

Les conditions 2.(b) et 2.(d) des définitions 7.6 et 7.7 se traduisent par les condition 3 (a) et (b) ci-dessus.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que la construction qui à $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$ associe $(X, g_0, h\tau(h)^{-1})$ définit par passage au quotient une bijection avec les propriétés annoncées. On notera que le groupe $\mathrm{Int}(h^{-1})T_X(F_0)$ est bien inclus dans $G(\mathbb{A}_0)$.

Le centralisateur de $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$ dans $M(F)$ est le groupe

$$\begin{aligned} \{t \in T_X(F_0) \mid (tg_v)_{v \in V} = (g_v)_{v \in V}\} &= T_X(F_0) \cap \prod_{v \in V} g_v G[[z_v]](k) g_v^{-1} \\ &\simeq (\mathrm{Int}(h^{-1})T_X(F_0)) \cap g_0 K g_0^{-1} \end{aligned}$$

ce qui donne la dernière assertion. □

11.5. Mesures de Haar. — On munit $G(\mathbb{A}_0)$ de la mesure de Haar normalisée par

$$\mathrm{vol}(K) = 1.$$

Plus généralement pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P de G , les groupes $M_P(\mathbb{A}_0)$ et $N_P(\mathbb{A}_0)$ sont munis des mesures de Haar normalisées par

$$\mathrm{vol}(M_P(\mathbb{A}_0) \cap K) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{vol}(N_P(\mathbb{A}_0) \cap K) = 1.$$

Soit $X_0 \in \mathfrak{m}(F_0)$ dont la caractéristique est égale à la restriction de a_M à $\text{Spec}(F_0)$. Un tel X_0 existe par la section de Kostant relative à M . On munit $T_{X_0}(\mathbb{A}_0)$ d'une mesure de Haar. Soit

$$T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1 = T_{X_0}(\mathbb{A}_0) \cap \text{Ker}(H_M) ;$$

c'est un sous-groupe ouvert de $T_{X_0}(\mathbb{A}_0)$ qu'on munit de la mesure induite. On munit $T_{X_0}(F_0)$ de la mesure de comptage et $T_{X_0}(F_0) \backslash T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1$ de la mesure quotient.

Lemme 11.3. — *Le volume du quotient ci-dessous est fini*

$$(11.4) \quad \text{vol}(T_{X_0}(F_0) \backslash T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1) < \infty.$$

Démonstration. — D'après le corollaire 3.9, il existe un élément $X \in \mathfrak{m}(F)$, semi-simple, G -régulier et elliptique dans $\mathfrak{m}(F)$. D'après le lemme 3.6, X et X_0 sont conjugués sous $M(F)$. On en déduit que le plus grand sous-tore F_0 -déployé de T_{X_0} est inclus dans le centre connexe de $M \times F_0$ (et en fait égal). Ainsi, le T_{X_0} est F_0 -elliptique dans M et l'on sait bien que le quotient $T_{X_0}(F_0) \backslash T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1$ est alors compact d'où la finitude du volume. \square

Soit $\delta \in G(F)$ et $X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0)$ de caractéristique a_M . La condition sur la caractéristique entraîne que X_0 et X sont conjugués par un élément $m \in M(F)$ (cf. lemme 3.6). L'automorphisme $\text{Int}(m)$ induit un F_0 -isomorphisme entre les tores T_{X_0} et T_X . Par transport par $\text{Int}(m)$, on déduit de la mesure sur $T_{X_0}(\mathbb{A}_0)$ une mesure de Haar sur $T_X(\mathbb{A}_0)$ pour laquelle on a

$$(11.5) \quad \text{vol}(T_X(F_0) \backslash T_X(\mathbb{A}_0)^1) = \text{vol}(T_{X_0}(F_0) \backslash T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1).$$

On note

$$(11.6) \quad \text{vol}(a, t)$$

le volume ci-dessus.

11.6. Réseaux dans \mathfrak{a}_M . — Soit G_{sc} le revêtement simplement connexe de G . Soit $L \in \mathcal{L}^G(T)$ un sous-groupe de Levi semi-standard. Soit L_{sc} l'image réciproque de L dans G_{sc} . Soit L_{der} le groupe dérivé de L et L_{SC} le revêtement simplement connexe de L_{der} . On ne confondra pas L_{sc} et L_{SC} . Le groupe L_{SC} est en fait le groupe dérivé de L_{sc} . On note encore $T_?$ le tore obtenu par image réciproque de T dans ? où ? peut être l'un des trois groupes L_{der} , L_{SC} ou L_{sc} . Soit

$$\pi_1(L_{\text{der}}) = \text{coker}(X_*(T_{L_{\text{SC}}}) \rightarrow X_*(T_{L_{\text{der}}})) .$$

Le morphisme de restriction $X^*(L) \rightarrow X^*(T)$ et donne dualement un morphisme $X_*(T) \rightarrow X_*(L)$ où l'on a posé $X_*(L) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(L), \mathbb{Z})$.

Lemme 11.4. — *On a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes.*

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & X_*(T_{L_{\text{SC}}}) & \longrightarrow & X_*(T_{G_{\text{sc}}}) & \longrightarrow & X_*(L_{\text{sc}}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_*(T_{L_{\text{der}}}) & \longrightarrow & X_*(T) & \longrightarrow & X_*(L) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \pi_1(L_{\text{der}}) & \longrightarrow & \pi_1(G) & \longrightarrow & X_*(L)/X_*(L_{\text{sc}}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Démonstration. — Traitons l'exactitude de la deuxième ligne. Il s'agit d'une suite de \mathbb{Z} -module libre dont la suite duale est la suite exacte

$$0 \longrightarrow X^*(L) \longrightarrow X^*(T) \longrightarrow X^*(T_{L_{\text{der}}}) \longrightarrow 0.$$

Seule la surjectivité est moins évidente. Elle résulte des isomorphismes

$$T/T_{L_{\text{der}}} = Z_L^0/(Z_L^0 \cap L_{\text{der}}) = L/L_{\text{der}},$$

où Z_L^0 est le centre connexe de L , et de l'égalité $X^*(L) = X^*(L_{\text{der}})$.

L'exactitude de la première ligne se déduit de celle de la deuxième lorsqu'on remplace L par L_{sc} . L'injectivité des deux premières flèches verticales est bien connue. On rappelle que $X_*(T_{G_{\text{sc}}})$ est le sous- \mathbb{Z} -module de $X_*(T)$ engendré par les coracines de T dans G . Le reste du diagramme se déduit alors du lemme du serpent et de l'injectivité de

$$\pi_1(L_{\text{der}}) \longrightarrow \pi_1(G)$$

c'est-à-dire de l'inclusion

$$X_*(T_{L_{\text{der}}}) \cap X_*(T_{G_{\text{sc}}}) \subset X_*(T_{L_{\text{SC}}}).$$

Cette dernière est évidente car $X_*(T_{L_{\text{SC}}})$ est d'indice fini dans $X_*(T_{L_{\text{der}}})$ et d'autre part $X_*(T_{L_{\text{SC}}})$ est facteur direct dans $X_*(T_{G_{\text{sc}}})$. \square

Le lemme 11.4 montre que la projection $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_M$ envoie $X_*(T)$ surjectivement sur $X_*(M)$. D'autre part, elle envoie le sous- \mathbb{Z} -module $X_*(T_{G_{\text{sc}}})$ surjectivement sur le sous- \mathbb{Z} -module $X_*(M_{\text{sc}})$ de $X_*(M)$.

11.7. Le poids w_M^ξ . — Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on introduit le poids

$$w_M^\xi(g) = |\{\mu \in X_*(M) \mid \mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + \mu) = 1\}|$$

qui est le nombre (fini) de points de l'ensemble $\xi_M + X_*(M)$ qui appartiennent à l'enveloppe convexe des points $-H_P(g)$ pour $P \in \mathcal{P}(M)$.

Lemme 11.5. — *La fonction poids $g \in G(\mathbb{A}) \mapsto w_M^\xi(g)$ est invariante à gauche par $M(\mathbb{A})$.*

Soit h et X deux éléments respectivement des ensembles décrits en 1 et 2 du lemme 11.2. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow T_X(\mathbb{A}_0)^1 \longrightarrow T_X(\mathbb{A}_0) \xrightarrow{H_M} X_*(M) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — L'action à gauche de $h \in M(\mathbb{A})$ translate l'enveloppe convexe des points $-H_P(g)$ par le vecteur $H_M(h)$. Comme ce dernier appartient à $X_*(M)$, cela ne change pas $w_M^\xi(g)$.

Dans la suite exacte, seule la surjectivité à droite n'est pas évidente. Il suffit de prouver cette surjectivité pour la restriction de H_M à $T_X(\mathbb{F}_q((z_\infty)))$. En combinant le lemme 3.6 et la proposition 3.8, on montre que X et t_a sont conjugués sous $M((z_\infty))(k)$ ($t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}[[z_\infty]](k)$ est l'élément défini dans la proposition 3.8). On remarquera qu'on a même $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}[[z_\infty]](\mathbb{F}_q)$. L'automorphisme $\text{Int}(m)$ induit alors un $\mathbb{F}_q((z_\infty))$ -isomorphisme entre les $\mathbb{F}_q((z_\infty))$ -tores déduits de T_X et T par changement de base. La surjectivité est alors évidente. \square

11.8. Intégrales orbitales pondérées J_M^ξ . — Soit h et X deux éléments respectivement des ensembles décrits en 1 et 2 du lemme 11.2. Posons $Y = \text{Ad}(h^{-1})X$ et $T_Y(\mathbb{A}_0) = \text{Int}(h^{-1})T_X(\mathbb{A}_0)$. Le groupe $T_X(\mathbb{A}_0)$ a été muni d'une mesure de Haar en §11.5. Le groupe $T_Y(\mathbb{A}_0)$ est muni de la mesure déduite par transport. On introduit alors l'intégrale orbitale pondérée suivante

$$(11.7) \quad J_M^\xi(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = \int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) w_M^\xi(g) dg.$$

On a muni $T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)$ de la mesure quotient. L'intégrale converge car l'intégrande est à support compact. Pour alléger les notations, on omet la fonction $\mathbf{1}_{D_0}$ et on pose

$$J_M^\xi(Y) = J_M^\xi(Y, \mathbf{1}_{D_0}).$$

Remarque. — Cette intégrale orbitale pondérée n'est pas celle qu'Arthur utilise habituellement. Le lien avec celle d'Arthur se fera au §11.14.

11.9. Un premier comptage. — Voici une première expression pour le cardinal d'une fibre.

Proposition 11.6. — *On a l'égalité*

$$\text{card}([M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}]) = \text{vol}(a, t) \sum_h \sum_X J_M^\xi(\text{Ad}(h^{-1})X)$$

où h et X parcourent respectivement les ensembles décrits en 1 et 2 du lemme 11.2 .

Démonstration. — D'après la formule donnée au §11.2 et le lemme 11.2, le cardinal du groupoïde $[M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}]$ s'écrit comme la somme sur les éléments h et X des ensembles respectivement décrits en 1 et 2 du lemme 11.2 de

$$\sum_{g \in T_Y(F_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)/K} \frac{1}{|T_Y(F_0) \cap gKg^{-1}|} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) \mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + H_M(h)),$$

où l'on a posé $Y = \text{Ad}(h^{-1})X$ et $T_Y(F_0) = \text{Int}(h^{-1})T_X(F_0)$ comme ci-dessus. D'après notre choix de mesure sur $G(\mathbb{A}_0)$, cette expression s'écrit encore

$$\int_{T_Y(F_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) \mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + H_M(h)) dg.$$

Introduisons le groupe $T_Y(\mathbb{A}_0) = \text{Int}(h^{-1})T_X(\mathbb{A}_0)$ qui est muni de la mesure de Haar déduite de $T_X(\mathbb{A}_0)$. Comme $g \mapsto \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y)$ est invariante à droite par $T_Y(\mathbb{A}_0)$, l'expression précédente s'écrit

$$\int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) \int_{T_Y(F_0) \backslash T_Y(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{tg}(\xi_M + H_M(h)) dt \frac{dg}{dt}.$$

En utilisant l'égalité

$$\mathbf{1}_{tg}(\xi_M + H_M(h)) = \mathbf{1}_g(\xi_M + H_M(h) + H_M(t))$$

nos choix de mesures et le lemme 11.5, on voit qu'on a

$$\int_{T_Y(F_0) \backslash T_Y(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{tg}(\xi_M + H_M(h)) dt = \text{vol}(T_{X_0}(F_0) \backslash T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1) \cdot w_M^\xi(g).$$

Le résultat s'en déduit. □

11.10. Une formule pour le poids w_M^ξ . — Le but de cette section est de donner une formule analytique pour le poids w_M^ξ . Cela nous permettra ensuite de comparer ce poids à celui qu'Arthur considère dans ses travaux. Pour cela, on suit, à peu de choses près, Arthur (cf. [4] §6). On a introduit au §11.6 le sous- \mathbb{Z} -module $X_*(M_{\text{sc}})$ de $X_*(M)$. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. L'ensemble Δ_P^\vee défini au §5.2 fournit une base de $X_*(M_{\text{sc}})$. Tout $\lambda \in \mathfrak{a}_M$ s'écrit de manière unique

$$(11.8) \quad \lambda = [\lambda]_P + \{\lambda\}_P$$

avec $[\lambda]_P \in X_*(M_{\text{sc}})$ et

$$\{\lambda\}_P = \sum_{\alpha \in \Delta_P} r_\alpha \alpha^\vee$$

avec $0 \leq r_\lambda < 1$.

Pour tout $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$, soit

$$c_P(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_P} (\exp(\Lambda(\alpha^\vee)) - 1).$$

Lorsque $M = G$, ce produit vaut 1 (par convention tout produit sur l'ensemble vide vaut 1). Dans la suite, on dit que $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ est générique si $c_P(\Lambda) \neq 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ c'est-à-dire $\Lambda(\alpha^\vee) \neq 0$ pour tous $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\alpha^\vee \in \Delta_P^\vee$.

Proposition 11.7. — *Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on a l'égalité suivante*

$$w_M^\xi(g) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{\mu_0 \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} c_P(\Lambda)^{-1} \exp(-\Lambda(H_P(g) + [\mu_0 + \xi_M]_P))$$

où la limite est prise sur les $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ génériques.

Remarque. — Dans la limite, la somme intérieure dépend du choix d'un système de représentants de $X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})$. Changer μ_0 en $\mu_0 + \mu$ avec $\mu \in X_*(M_{\text{sc}})$ multiplie la somme intérieure par $\exp(-\Lambda(\mu))$. Cela n'affecte donc pas la limite en $\Lambda = 0$.

Démonstration. — Elle repose entièrement sur les méthodes d'Arthur. Donnons quelques indications pour la commodité du lecteur. Soit $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ générique et $P \in \mathcal{P}(M)$. Soit $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}$ la base de \mathfrak{a}_M duale de Δ_P^\vee . Soit

$$\Delta_P^\Lambda = \{\alpha \in \Delta_P \mid \Lambda(\alpha^\vee) < 0\}$$

et φ_P^Λ la fonction caractéristique des $\lambda \in \mathfrak{a}_M$ tels que $\varpi_\alpha(\lambda) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^\Lambda$ et $\varpi_\alpha(\lambda) \leq 0$ pour $\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^\Lambda$. Soit $g \in G(\mathbb{A})$. D'après un lemme dû à Langlands (cf. [4] formule (3.8) p.22), la fonction caractéristique de l'enveloppe convexe des points $-H_P(g)$ est égale à la fonction

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} \varphi_P^\Lambda(\mu + H_P(g))$$

de la variable $\mu \in \mathfrak{a}_M$. Cette formule vaut dans notre contexte car la famille $(-H_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$ est orthogonale positive au sens d'Arthur (cf. [4] pp.19-20). Il s'ensuit qu'on a

$$w_M^\xi(g) = \sum_{\mu \in X_*(M)} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} \varphi_P^\Lambda(\mu + \xi_M + H_P(g)).$$

À la suite d'Arthur (cf. [4] §6), on introduit la série de Fourier pour $p \in \mathcal{P}(M)$

$$S_P(\Lambda) = \sum_{\mu \in X_*(M)} \varphi_P^\Lambda(\mu + \xi_M + H_P(g)) \exp(\Lambda(\mu)).$$

Cette série est absolument convergente et définit une fonction continue sur le complémentaire dans \mathfrak{a}_M^* des hyperplans d'équation α^\vee pour $\alpha \in \Delta_P$. De plus, la limite en $\Lambda = 0$ de cette série et la somme

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} S_P(\Lambda)$$

a pour limite en $\Lambda = 0$ (où la limite est prise sur les Λ génériques) le poids $w_M^\xi(g)$. Pour calculer la somme de la série $S_P(\Lambda)$, il est plus commode de sommer d'abord sur $X_*(M_{\text{sc}})$ et ensuite sur un système de représentants de $X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})$. Soit $\mu_0 \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})$. La contribution de μ_0 à $S_P(\Lambda)$ est

$$\sum_{\mu \in X_*(M_{\text{sc}})} \varphi_P^\Lambda(\mu + \mu_0 + \xi_M + H_P(g)) \exp(\Lambda(\mu + \mu_0)).$$

Par un changement de variable et l'utilisation de la décomposition

$$\mu_0 + \xi_M = [\mu_0 + \xi_M]_P + \{\mu_0 + \xi_M\}_P,$$

on voit que la somme ci-dessus est égale à

$$\exp(\Lambda(\mu_0 - [\mu_0 + \xi]_P - H_P(g))) \sum_{\mu \in X_*(M_{\text{sc}})} \varphi_P^\Lambda(\mu + \{\mu_0 + \xi_M\}_P) \exp(\Lambda(\mu)).$$

Comme on a $\{\mu_0 + \xi_M\}_P = \sum_{\alpha \in \Delta_P} r_\alpha \alpha^\vee$ avec $0 \leq r_\alpha < 1$ et que Δ_P^\vee est une base de $X_*(M_{\text{sc}})$, la somme ci-dessus est égale à

$$\sum_{(m_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}} \exp(\Lambda(\sum_{\alpha \in \Delta_P} m_\alpha \alpha^\vee))$$

où l'on somme sur les familles d'entiers $(m_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}$ qui vérifient $m_\alpha \geq 0$ pour $\alpha \in \Delta_P^\Lambda$ et $m_\alpha \leq -1$ pour $\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^\Lambda$. Ces séries géométriques ont pour somme

$$\sum_{(m_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}} \exp(\Lambda(\sum_{\alpha \in \Delta_P} m_\alpha \alpha^\vee)) = (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} c_P(\Lambda)^{-1}.$$

Le résultat annoncé s'en déduit. \square

11.11. Poids et intégrales orbitales pondérées d'Arthur. — Comme au §6.3, on munit \mathfrak{a}_T d'un produit scalaire invariant par W . Pour tout $L \in \mathcal{L}$, on munit \mathfrak{a}_L de la mesure de Haar qui donne le covolume 1 aux réseaux engendrés par des bases orthonormales dans \mathfrak{a}_L . Par définition, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, le poids d'Arthur

$$v_M(g)$$

est le volume dans \mathfrak{a}_M de l'enveloppe convexe des points $-H_P(g)$. On va rappeler l'expression analytique due à Arthur de ce poids. Auparavant, pour tous $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$, on introduit le polynôme

$$d_P(\Lambda) = \text{vol}(\mathfrak{a}_M / X_*(M_{\text{sc}}))^{-1} \prod_{\alpha \in \Delta_P} \Lambda(\alpha^\vee).$$

Pour $M = G$, on a, par convention, $\text{vol}(\mathfrak{a}_G / X_*(G_{\text{sc}})) = 1$ et le polynôme ci-dessus est le polynôme constant égal à 1.

Proposition 11.8. — (Arthur [1] pp. 219-220) *Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on a l'égalité suivante*

$$v_M(g) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} d_P(\Lambda)^{-1} \exp(-\Lambda(H_P(g)))$$

où la limite est prise sur les $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ génériques.

Démonstration. — Le poids $v_M(g)$ est égal la limite en $\Lambda = 0$ de la transformée de Fourier

$$\int_{\mathfrak{a}_M} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} \varphi_P^\Lambda(\mu + H_P(g)) \exp(\Lambda(\mu)) d\mu.$$

Or celle-ci se calcule et vaut $\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} d_P(\Lambda)^{-1} \exp(-\Lambda(H_P(g)))$. \square

Reprenons les notations du §11.8. Lorsqu'on fait agir $T_Y(\mathbb{A}_0)$ par translation à gauche sur $G(\mathbb{A}_0)$, l'enveloppe convexe des points $(-H_P(g))$ pour $P \in \mathcal{P}(M)$ subit une translation par un vecteur de $H_M(T_Y(\mathbb{A}_0))$. Le volume $v_M(g)$ est donc invariant à gauche par $T_Y(\mathbb{A}_0)$. L'intégrale orbitale pondérée d'Arthur (cf. [2] §8) est définie par la formule

$$(11.9) \quad J_M(Y) = J_M(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = \int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) v_M(g) dg.$$

Ce sont en fait des analogues pour les algèbres de Lie des intégrales orbitales pondérées d'Arthur. Ces intégrales apparaissent naturellement dans un analogue pour les algèbres de Lie de la formule des traces d'Arthur-Selberg (cf. [11]).

11.12. Les (G, M) -familles. — Dans [3], Arthur a introduit la notion de (G, M) -famille. Une (G, M) -famille est une famille de fonctions $(b_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ lisses sur \mathfrak{a}_M^* et qui vérifient pour un couple (P, P') de sous-groupes paraboliques adjacents la condition de “recollement”

$$b_P(\Lambda) = b_{P'}(\Lambda)$$

sur l'hyperplan $\Lambda(\alpha^\vee) = 0$ où α^\vee est l'unique élément de $\Delta_P^\vee \cap (-\Delta_{P'}^\vee)$. On peut alors définir *a priori* uniquement pour Λ générique la fonction

$$(11.10) \quad b_M(\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} d_P(\Lambda)^{-1} b_P(\Lambda)$$

et Arthur montre que cette fonction se prolonge en une fonction lisse sur \mathfrak{a}_M^* ([3], lemme 6.2). On pose

$$b_M = b_M(0).$$

Les exemples de (G, M) -familles que l'on considérera sont les deux suivants. Le premier exemple, qui dépend de $g \in G(\mathbb{A})$, est la famille $(v_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$ où, pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, on introduit la fonction de la variable Λ

$$(11.11) \quad v_P(g, \Lambda) = \exp(-\Lambda(H_P(g))).$$

La condition de recollement résulte du lemme 5.7. Le second exemple est la famille $(w_P(\mu))_{P \in \mathcal{P}(M)}$ qui dépend de $\mu \in \mathfrak{a}_M$ et qui est définie par

$$(11.12) \quad w_P(\mu, \Lambda) = \frac{d_P(\Lambda)}{c_P(\Lambda)} \exp(-\Lambda([\mu]_P)).$$

Le lecteur vérifiera immédiatement que le lemme ci-dessous implique que la famille précédente est une (G, M) -famille.

Lemme 11.9. — *Soit $\mu \in \mathfrak{a}_M$. Soit P et P' deux sous-groupes paraboliques dans $\mathcal{P}(M)$ adjacents et soit α^\vee l'unique élément de $\Delta_P^\vee \cap (-\Delta_{P'}^\vee)$. Pour tout $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ qui vérifie $\Lambda(\alpha^\vee) = 0$, on a*

$$\Lambda([\mu]_P) = \Lambda([\mu]_{P'}).$$

Démonstration. — L'hyperplan de \mathfrak{a}_M^* d'équation $\Lambda(\alpha^\vee) = 0$ n'est autre que le sous-espace \mathfrak{a}_Q^* où Q est le plus petit sous-groupe parabolique de G qui contient à la fois P et P' . La projection p_Q de \mathfrak{a}_M sur \mathfrak{a}_Q selon la décomposition $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_M^Q$ induit une bijection de $\Delta_P^\vee - \{\alpha^\vee\}$, resp. $\Delta_{P'}^\vee - \{-\alpha^\vee\}$, sur Δ_Q^\vee . Soit $\mu \in \mathfrak{a}_M$. Écrivons cet élément dans les bases Δ_P^\vee et $\Delta_{P'}^\vee$,

$$\mu = \sum_{\beta \in \Delta_P} x_\beta \beta^\vee = \sum_{\gamma \in \Delta_{P'}} y_\gamma \gamma^\vee.$$

Pour tous $\beta \in \Delta_P$ et $\gamma \in \Delta_{P'}$ distincts de $\pm\alpha$ tels que $p_Q(\beta^\vee) = p_Q(\gamma^\vee)$ on donc $x_\beta = y_\gamma$. En utilisant la notation $[\cdot]$ pour la partie entière, on a donc

$$p_Q([\mu]_P) = \sum_{\beta \in \Delta_P - \{\alpha\}} [x_\beta] p_Q(\beta^\vee) = \sum_{\gamma \in \Delta_{P'} - \{-\alpha\}} [y_\gamma] p_Q(\gamma^\vee) = p_Q([\mu]_{P'})$$

d'où

$$\Lambda([\mu]_P) = \Lambda([\mu]_{P'})$$

pour tout $\Lambda \in \mathfrak{a}_Q^*$. □

11.13. Produit de deux (G, M) -familles. — Le produit de deux (G, M) -familles est évidemment une (G, M) -famille. On note $(v \cdot w)(g, \mu)$ le produit des familles $v(g)$ et $w(\mu)$ définies en (11.11) et (11.12) ci-dessus. Dans le lemme suivant, on reformule les propositions 11.7 et 11.8.

Lemme 11.10. — *Pour tout $g \in g(\mathbb{A})$, les poids $w_M^\xi(g)$ et $v(g)$ sont respectivement les valeurs en $\Lambda = 0$ des fonctions lisses*

$$\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})} (v \cdot w)_M(g, \mu + \xi_M, \Lambda).$$

et

$$v_M(g, \Lambda).$$

La clef pour notre problème de comparaison d'intégrales orbitales pondérées est une formule pour le produit $(v \cdot w)_M$ due à Arthur. Avant de pouvoir l'énoncer dans le lemme 11.13, nous aurons besoin de quelques notations supplémentaires.

Soit b une (G, M) -famille et $L \in \mathcal{L}(M)$. Pour tout $Q \in \mathcal{P}(L)$, la fonction sur \mathfrak{a}_L^* obtenue par restriction de b_P ne dépend pas du choix du sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}^Q(M)$. La famille $(b_Q)_{Q \in \mathcal{P}(L)}$ est une (G, L) -famille. Par la formule (11.10) appliquée au sous-groupe de Levi L , on obtient une fonction lisse notée $b_L(\Lambda)$ sur \mathfrak{a}_L^* et on pose

$$b_L = b_L(0).$$

Lemme 11.11. — *Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. Pour tout $\mu \in \mathfrak{a}_M$ soit $(w_Q(\mu, \Lambda))_{Q \in \mathcal{P}(L)}$ la (G, L) -famille déduite comme ci-dessus de la (G, M) -famille $(w_P(\mu, \Lambda))_{P \in \mathcal{P}(M)}$ définie en (11.12). Alors on a*

$$\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})} w_L(\mu + \xi_M) = \frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))} \cdot w_L^\xi(1)$$

où

- par convention, on pose $\text{vol}(\mathfrak{a}_G/X_*(G)) = 1$;
- 1 est l'élément neutre de $G(\mathbb{A}_0)$;
- le second membre est celui défini au §11.7 lorsqu'on remplace M par L .

Démonstration. — Le membre de gauche vaut par définition

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{\mu_0 \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})} \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} d_Q(\Lambda)^{-1} \cdot \frac{d_P(\Lambda)}{c_P(\Lambda)} \cdot \exp(-\Lambda([\mu_0 + \xi_M]_P))$$

où

- la limite est prise sur les $\Lambda \in \mathfrak{a}_L^*$ génériques ;
- pour chaque $Q \in \mathcal{P}(L)$, on choisit $P \in \mathcal{P}^Q(M)$;
- la fraction $\frac{d_P(\Lambda)}{c_P(\Lambda)}$ est bien définie sur les points génériques de \mathfrak{a}_M^* et se prolonge en une fonction lisse sur \mathfrak{a}_M^* .

Pour de tels Λ , Q et P , on vérifie les formules

$$\frac{d_P(\Lambda)}{c_P(\Lambda)} = \frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L_{\text{sc}}))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M_{\text{sc}}))} \cdot \frac{d_Q(\Lambda)}{c_Q(\Lambda)}$$

et

$$[\mu_0 + \xi_M]_P = [\mu'_0 + \xi_L]_Q$$

où μ'_0 est la projection de μ_0 sur \mathfrak{a}_L . Le lemme 11.4 implique que la projection de \mathfrak{a}_M sur \mathfrak{a}_L induit une surjection de $X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})$ sur $X_*(L)/X_*(L_{\text{sc}})$. L'ordre de son noyau se combine au rapport des covolumes des réseaux $X_*(L_{\text{sc}})$ et $X_*(M_{\text{sc}})$ pour donner le facteur

$$\frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))}$$

On conclut la démonstration en appliquant la proposition 11.7 au sous-groupe de Levi L et à $g = 1$. □

Soit Q un sous-groupe parabolique de Levi L . Arthur définit également une (L, M) -famille \mathbf{b}^Q de la façon suivante : pour tout $P \in \mathcal{P}^L(M)$, $\mathbf{b}_P^Q(\Lambda)$ est la fonction lisse sur \mathfrak{a}_M^* définie par

$$\mathbf{b}_P^Q(\Lambda) = \mathbf{b}_{PN_Q}(\Lambda),$$

où le groupe PN_Q est l'élément de $\mathcal{P}(M)$ engendré par P et N_Q . On peut alors former une fonction lisse

$$\mathbf{b}_M^Q(\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^L(M)} \mathbf{d}_P^Q(\Lambda)^{-1} \mathbf{b}_P^Q(\Lambda)$$

en utilisant le coefficient

$$\mathbf{d}_P^Q(\Lambda) = \text{vol}(\mathfrak{a}_M^Q/X_*(M'))^{-1} \prod_{\alpha \in \Delta_P^Q} \Lambda(\alpha^\vee)$$

où $\Delta_P^Q \subset \Delta_P$ est le sous-ensemble des racines dans L et M' est l'image réciproque de M dans le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de L . Le \mathbb{Z} -module $X_*(M')$ est alors le réseau de \mathfrak{a}_M^Q engendré par Δ_P^Q .

Notons le lemme suivant qui est dû à Arthur et dont on laisse la démonstration au lecteur.

Lemme 11.12. — *Soit $L \in \mathcal{L}(M)$ et $Q \in \mathcal{P}(L)$. Soit $g \in G(\mathbb{A}_0)$.*

Soit $\mathbf{v}^Q(g)$ la (L, M) -famille déduite de $\mathbf{v}(g)$.

Pour tout $l \in L(\mathbb{A}_0)$, soit $\mathbf{v}^L(l)$ la (L, M) -famille définie par $\mathbf{v}_P^L(l, \Lambda) = \exp(-\Lambda(H_P(l)))$.

On a l'égalité de (L, M) -familles

$$\mathbf{v}^Q(g) = \mathbf{v}^L(l_Q(g))$$

où $l_Q(g) \in L(\mathbb{A}_0)$ est donné par la décomposition d'Iwasawa

$$g \in l_Q(g)N_Q(\mathbb{A}_0)K.$$

En particulier, on a l'égalité

$$(11.13) \quad \mathbf{v}_M^Q(g) = \mathbf{v}_M^L(l_Q(g))$$

Arthur déduit également d'une (G, M) -famille \mathbf{b} une fonction lisse sur \mathfrak{a}_Q^* notée $\mathbf{b}'_Q(\Lambda)$ (cf. [3] §6(6.3) et lemme 6.1). Nous ne rappellerons pas sa définition ; seules les deux propriétés suivantes nous seront utiles.

Lemme 11.13. — *(cf. [3] lemme 6.3 et corollaire 6.4) Soit \mathbf{b} une (G, M) -famille.*

1. Pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$ et $\Lambda \in \mathfrak{a}_L^$, on a*

$$\mathbf{b}_L(\Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} \mathbf{b}'_Q(\Lambda).$$

2. Soit e une (G, M) -famille et $e \cdot b$ le produit de e et b . Pour tout $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$, on a l'égalité

$$(e \cdot b)_M(\Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} e_M^Q(\Lambda) b'_Q(\Lambda).$$

11.14. Comparaison d'intégrales orbitales pondérées. — Soit $L \in \mathcal{L}(M)$ et $Q \in \mathcal{P}(L)$. On reprend les notations du §11.8. Les “poids” v_M^Q et v_M^L déduits des (L, M) -familles éponymes permettent de définir les intégrales orbitales pondérées ci-dessus

$$J_M^Q(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = \int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) v_M^Q(g) dg.$$

et

$$J_M^L(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = \int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash L(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(l^{-1})Y) v_M^L(l) dl.$$

Pour $Q = G$ ou $L = G$, on retrouve l'intégrale J_M définie en (11.9). Les deux intégrales sont reliées par la formule de descente énoncée ci-dessous.

Lemme 11.14. — Avec les notations ci-dessous, on a

$$J_M^Q(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = q^{\dim(\mathfrak{n}_Q) \deg(D_0)} J_M^L(Y, \mathbf{1}_{D_0})$$

Démonstration. — Elle repose sur la formule (11.13) du lemme 11.12, la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}_0) = L(\mathbb{A}_0)N_Q(\mathbb{A}_0)K$, qui est compatible à nos choix de mesures ainsi que, pour $l \in L(\mathbb{A}_0)$, sur le changement de variables $n \mapsto \text{Ad}(ln)^{-1}Y - Y$ qui induit un isomorphisme entre les espaces mesurés $N_Q(\mathbb{A}_0)$ et $\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A}_0)$, ce dernier étant muni de la mesure de Haar qui donne le volume 1 au produit $\prod_{v \in V_0} \mathfrak{n}_Q[[z_v]](\mathbb{F}_q)$. Le facteur en q provient de l'égalité

$$\int_{\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(Z) dZ = q^{\dim(\mathfrak{n}_Q) \deg(D_0)}.$$

□

On peut alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 11.15. — Avec les notations ci-dessus, on a

$$J_M^\xi(Y) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} q^{1/2(\dim(G) - \dim(L))} \cdot \frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))} \cdot J_M^L(Y) \cdot w_L^\xi(1)$$

où $1 \in G(\mathbb{A}_0)$ est l'élément neutre.

Démonstration. — Soit $g \in G(\mathbb{A}_0)$ et $\mu \in \mathfrak{a}_M$. D'après l'assertion 2 du lemme 11.13, on a

$$(v \cdot w)_M(g, \mu, \Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} v_M^Q(g, \Lambda) w'_Q(\mu, \Lambda).$$

En utilisant cette formule et le lemme 11.10, on obtient

$$w_M^\xi(g) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} v_M^Q(g) \cdot \left(\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})} w'_Q(\mu + \xi_M) \right)$$

d'où l'on déduit la relation

$$(11.14) \quad J_M^\xi(Y) = \sum_{Q \in \mathcal{L}(M)} J_M^Q(Y) \cdot \left(\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})} w'_Q(\mu + \xi_M) \right)$$

En utilisant la formule de descente du lemme 11.14, la ligne (11.14) ci-dessus se réécrit

$$(11.15) \quad J_M^\xi(Y) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} q^{1/2(\dim(G) - \dim(L))} J_M^L(Y) \cdot \left(\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})} \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} w'_Q(\mu + \xi_M) \right).$$

D'après l'assertion 1 du lemme 11.13, on a

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} w'_Q(\mu + \xi_M) = w_L(\mu + \xi_M)$$

et d'après le lemme 11.11, on a

$$\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})} w_L(\mu + \xi_M) = \frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))} \cdot w_L^\xi(1).$$

Cela conclut la démonstration. \square

Corollaire 11.16. — *Avec les notations ci-dessus, on a pour tout $\xi \in \mathfrak{a}_T$ en position générale l'égalité*

$$J_M^\xi(Y) = \text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))^{-1} \cdot J_M^G(Y).$$

Démonstration. — Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. Par définition (cf. §11.7), le poids $w_L^\xi(1)$ vaut 1 si 0 appartient à $\xi_L + X_*(L)$ et 0 sinon. Or comme ξ est en position générale, le premier cas n'est possible que si $L = G$ (cf. définition 6.3). D'où le corollaire. \square

11.15. Démonstration du théorème 11.1. Le théorème 11.1 est simplement une reformulation de la proposition 11.6, pour des ξ en position générale, à l'aide du corollaire 11.16.

Références

- [1] J. Arthur. The characters of discrete series as orbital integrals. *Invent. Math.*, 32(3) :205–261, 1976.
- [2] J. Arthur. A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$. *Duke Math. J.*, 45(4) :911–952, 1978.
- [3] J. Arthur. The trace formula in invariant form. *Ann. of Math. (2)*, 114(1) :1–74, 1981.
- [4] J. Arthur. A local trace formula. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (73) :5–96, 1991.
- [5] A. Beauville and Y. Laszlo. Un lemme de descente. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(3) :335–340, 1995.
- [6] A. Beauville, M. Narasimhan, and S. Ramanan. Spectral curves and the generalised theta divisor. *J. Reine Angew. Math.*, 398 :169–179, 1989.
- [7] K. Behrend. Semi-stability of reductive group schemes over curves. *Math. Ann.*, 301(2) :281–305, 1995.
- [8] I. Biswas and S. Ramanan. An infinitesimal study of the moduli of Hitchin pairs. *J. London Math. Soc. (2)*, 49(2) :219–231, 1994.
- [9] H. Boden and K. Yokogawa. Moduli spaces of parabolic Higgs bundles and parabolic $K(D)$ pairs over smooth curves. I. *Internat. J. Math.*, 7(5) :573–598, 1996.
- [10] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.

- [11] P.-H. Chaudouard. La formule des traces pour les algèbres de Lie. *Math. Ann.*, 322(2) :347–382, 2002.
- [12] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc. Cohomologie des groupes de type multiplicatif sur les schémas réguliers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(6) :A449–A452, 1978.
- [13] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc. Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles. *Math. Ann.*, 244(2) :105–134, 1979.
- [14] V. G. Drinfel'd and C. Simpson. B -structures on G -bundles and local triviality. *Math. Res. Lett.*, 2(6) :823–829, 1995.
- [15] E. Esteves. Compactifying the relative Jacobian over families of reduced curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(8) :3045–3095 (electronic), 2001.
- [16] G. Faltings. Stable G -bundles and projective connections. *J. Algebraic Geom.*, 2(3) :507–568, 1993.
- [17] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11) :167, 1961.
- [18] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32) :361, 1967.
- [19] G. Harder. Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern. *Invent. Math.*, 7 :33–54, 1969.
- [20] G. Harder. Chevalley groups over function fields and automorphic forms. *Ann. of Math. (2)*, 100 :249–306, 1974.
- [21] J. Heinloth. Semistable reduction for G -bundles on curves. *J. Algebraic Geom.*, 17(1) :167–183, 2008.
- [22] J. Heinloth and A. Schmitt. The cohomology ring of moduli stacks of principal bundles over curves. Prépublication.
- [23] S. Langton. Valuation criteria for families of vector bundles on algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 101 :88–110, 1975.
- [24] B. C. Ngô. Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie. <http://arxiv.org/abs/0801.0446>.
- [25] B. C. Ngô. Fibration de Hitchin et endoscopie. *Invent. Math.*, 164(2) :399–453, 2006.
- [26] N. Nitsure. Moduli space of semistable pairs on a curve. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 62(2) :275–300, 1991.
- [27] J.-P. Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.

Pierre-Henri Chaudouard
 CNRS et Université Paris-Sud
 UMR 8628
 Mathématique, Bâtiment 425
 F-91405 Orsay Cedex
 France

Gérard Laumon
 CNRS et Université Paris-Sud
 UMR 8628
 Mathématique, Bâtiment 425
 F-91405 Orsay Cedex
 France

Adresses électroniques :
 Pierre-Henri.Chaudouard@math.u-psud.fr
 Gerard.Laumon@math.u-psud.fr